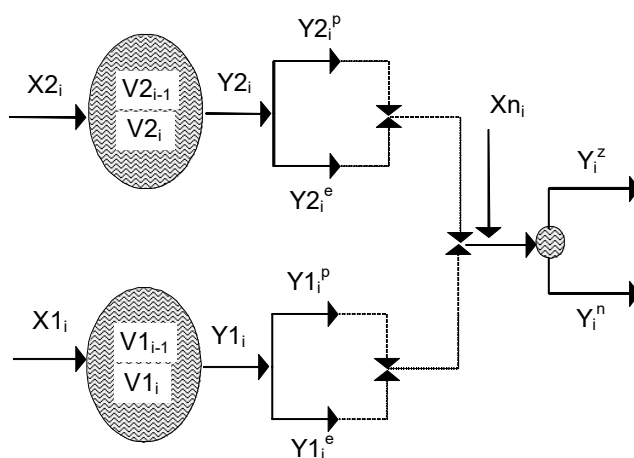


Универзитет „Св. Кирил и Методиј“
Градежен факултет - Скопје
Катедра за хидротехнички објекти



ОПТИМИЗАЦИЈА НА ХИДРОСИСТЕМИ



Проф. д-р Љупчо Петковски

Вер. 2020-11-14

Скопје, ноември 2020 година

Скрипта

ОПТИМИЗАЦИЈА НА ХИДРОСИСТЕМИ

Проф. д-р Љупчо Петковски

Предговор

Основните содржини на предметот „Оптимизација на хидросистеми“ се истражувањата и методологиите во унапредувањето на методите за оптимално управување со водостопанските системи. Водостопанските планирања се првата фаза на хидротехничките проекти, се изработуваат веднаш после хидролошките анализи, и му претходат на хидрауличките и конструктивните пресметки на хидротехничките објекти. Оптимизацијата на водостопанските системи е неопходна во трите сегменти на водостопанското планирање: (1) анализа на системот - одговор на системот за одредено хидролошко оптоварување во експлоатација, (2) синтеза на системот - избор на физичките параметри (големина на акумулација, површина за наводнување, инсталираното протекување на хидроцентрала), и (3) усвојување на конфигурација на сложениот систем.

Под функционална сигурност на водостопанскиот систем се подразбира задоволување на поставените цели во доменот на подмирувањето на водокорисниците со барана временска и количинска обезбеденост и/или реализирање на предвиденото производство на електрична енергија. Функционалната сигурност, како една од суштинските карактеристики на водостопанските системи, според која значајно се разликуваат од другите градежни објекти, се потврдува со водостопанската анализа. Непознавањето на современите оптимизациони методи за водостопанска анализа објаснува зошто овој толку важен сегмент од хидротехничкото планирање не е инкорпориран во хидротехничкиот проект, но секако не го оправдува проектантот, а уште помалку го ослободува од одговорноста за лошиот квалитет на планирањето.

Материјалот во скриптата „Оптимизација на хидросистеми“ е организиран во седум целини, по логичен редослед, за постапно надградување на знаењата релевантни за решавање на управувачките проблеми (планирање и користење) со водостопанските системи. Посебен акцент е даден на методот на Динамичкото програмирање, кој е нумерички најоперативниот метод за оптимална анализа на водостопанските системи со акумулација. Затоа оваа проблематика е издвоена во посебна потточка, каде преку постапно зголемување на сложеноста, се презентира можноста за користење на овој моќен нумерички апарат. Во натамошниот текст се дадени основните поставки на Имплицитниот стохастички пристап, и Повеќекритериумската оптимизација, без кои практично е невозможно планирањето на комплексните водостопански системи. На крајот даден е приказ на Теоријата на фази множества и објаснета е процедурата за формализирање на фази контролер за управување со ВСС со

акумулација, со користење на параметрите од оптималното управување, односно единственото управувачко искуство во фаза на планирање на системот.

Скриптата „Оптимизација на хидро системи“ содржински е конципирана според наставниот план за предметот „Оптимизација на хидро системи (2+2)“, од хидротехничката насока на Градежниот факултет, и првенствено е наменета за постдипломските студии по градежништво. Се надевам дека избраниот материјал, покрај за студентите по градежништво, ќе биде интересен за поширок круг на читатели, од водостопанските експерти до сите оние кои на разни начини учествуваат во одредени фази на одлучувањето во водостопанството. Ја користам оваа можност, однапред да се заблагодарам на внимателните читатели за сите корисни сугестии за подобрување на материјалот содржан во оваа скрипта.

За проширување на знаењата по материјата содржана во оваа скрипта ја препорачувам следната литература:

- ✓ Barron J.J., 1993. "Putting Fuzzy Logic into Focus", BYTE April, p.111-118
- ✓ Haimes Y.Y., 1977. "Hierarchical Analyses of Water Resources Systems ", Mc Graw Hill
- ✓ Limić N., Pašagić H., Rnjak Č., 1978. "Linearno i nelinearno programiranje", Informator, Zagreb
- ✓ Opricović S., 1986. "Višekriterijska optimizacija", Beograd
- ✓ Opricović S., 1992. "Optimizacija sistema", Beograd
- ✓ Opricović S., 1995. "Optimizacija sistema - Zadaci iz vodoprivrede i hidrotehnike", Beograd
- ✓ Petrić J., 1976. "Operaciona istraživanja, knjiga I i II", Beograd
- ✓ Požar H., 1966. "Snaga i energija u elektroenergetskim sistemima", Beograd
- ✓ Taha H., 2010, „Операциони истражувања: Вовед“, МАГОР, Скопје, "Operations research: An Introduction", 2007 Pearson Education
- ✓ USACE HEC, 1991. "Optimization of Multiple-Purpose Reservoir System Operations: A Review of Modeling and Analysis Approaches", RD-034, Davis, CA
- ✓ USACE HEC, 1996. "Developing Seasonal and Long-Term Reservoir System Operation Plans Using HEC-PRM", RD-040, Davis, CA
- ✓ White D.J., 1969. "Dynamic Programming", San Francisco
- ✓ Wilde D., Beightler C., 1967. "Foundations of Optimization", Prentice Hall
- ✓ Wurbs R.A., 1994. "Computer Models for Water Resources Planning and Management", USACE, IWR 94-NDS-7, Virginia

Скопје,
февруари 2019 година

Автор,
Љупчо Петковски

СОДРЖИНА

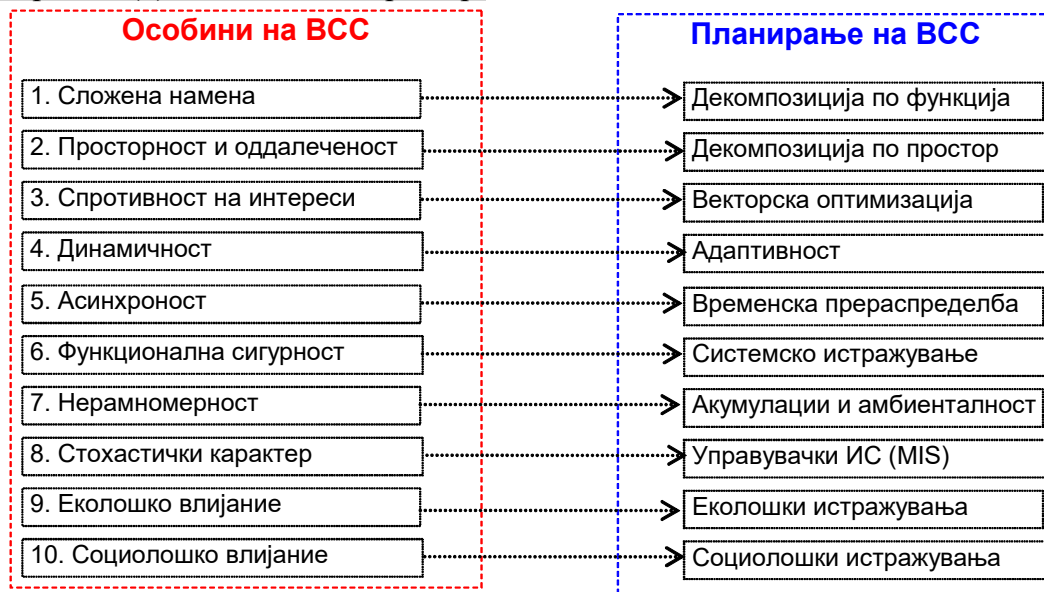
1. Основи на оптимизацијата на хидросистемите.....	1
1.1. Особини на ВСС значајни за оптимизацијата на ВСС.....	1
1.2. Кибернетски пристап во науката за водостопанските системи.....	3
1.2.1. Кибернетика - генерални принципи на управување со системите.....	3
1.2.2. Информации, системи - дефиниција и класификација.....	4
1.2.3. Директни и повратни врски во системите.....	7
1.2.4. Кибернетски опис на водостопанскиот систем.....	8
1.3. Математички модели на управување со ВСС.....	9
1.4. Управување со сложени водостопански системи.....	11
1.4.1. Хиерархиска организација.....	11
1.4.2. Декомпозиција и агрегација.....	13
1.4.3. Цели и критериуми на сложените системи.....	15
1.5. Пристапи во решавањето на управувачките задачи.....	16
1.6. Оптимизациони задачи со водостопанските системи.....	19
1.6.1. Оптимална анализа на ВСС.....	21
1.6.2. Оптимална синтеза на ВСС.....	22
1.6.3. Оптимален степен на водостопански развој.....	23
1.7. Субоптимизација на водостопанските системи.....	24
1.8. Оптимизационо-симулационен метод за анализа на водостопанските системи.....	25
2. Специфични модели во оптимизацијата на хидросистемите.....	29
2.1. Критериум на управување при оптимизација на ВСС.....	29
2.2. Модул за хидроенергетско производство.....	31
2.3. Интервални вредности на параметрите на ВСС и временска рамка во анализата на системот.....	35
2.4. Карактеристики на нивото на инсталираност на ХЕЦ.....	38
2.5. Оптимизација на зависни физички параметри.....	42
2.6. Математичка формализација на топографски и енергетски зависности.....	44
2.7. Комбиниран модел за сезонско управување со примена на повеќестепена линеарна корелација.....	46
3. Методи на математичкото програмирање и примена кај ВСС.....	50
3.1. Предмет на операционите истражувања.....	50
3.1.1. Решен пример број 3.1.1 - формализација на ММ за еден извор и два корисници.....	52
3.1.2. Решен пример број 3.1.2 - формализација на ММ за два извори и еден водокорисник.....	53
3.2. Линеарно програмирање.....	54
3.2.1. Задача на линеарното програмирање.....	54
3.2.2. Методи за решавање на проблеми на линеарното програмирање.....	56
3.3. Транспортен проблем.....	60
3.3.1. Затворен модел на транспортен проблем.....	61
3.3.2. Отворен модел на транспортен проблем.....	61
3.3.2.1. Отворен модел на ТП, задача - понуда поголема од побарувачка.....	61
3.3.2.2. Отворен модел на ТП, задача - понуда помала од побарувачка.....	62

3.3.3.	Транспортен модел со ограничени пропустливи способности.....	63
3.4.	Нелинеарно програмирање	64
3.4.1.	Задачи на нелинеарно програмирање.....	64
3.4.2.	Методи за решавање на задачите на нелинеарно програмирање	65
3.5.	Задача – оптимизација на регионален водоснабдителен систем со методот на ЛП	67
4.	Примена на динамичкото програмирање во оптимизација на ВСС	73
4.1.	Увод во динамичкото програмирање.....	73
4.2.	Основни поими на задачата на динамичкото програмирање	75
4.3.	Модифицирани модели на ДП за оптимална анализа на ВСС со акумулација	76
4.4.	Водостопански систем со двократно користење на водниот ресурс	78
4.5.	Повеќедимензионални водостопански системи.....	79
4.6.	Диференцијално динамичко програмирање.....	82
5.	Имплицитен стохастички пристап кај управувањето со ВСС.....	85
5.1.	Анализа на структурата на историски низи	86
5.2.	Генерирање на годишни протекувања	89
5.3.	Симулирање на месечни протекувања.....	92
6.	Повеќекритериумска оптимизација	94
6.1.	Вовед во повеќекритериумска оптимизација.....	94
6.2.	Компромисно програмирање	94
6.3.	Итеративно компромисно рангирање	97
6.4.	Задача – избор на оптимална конфигурација на сложен ВСС.....	98
7.	Теорија на фази множества	110
7.1.	Увод во теорија на фази множества	110
7.2.	Фази логика, основни принципи и елементи	115
7.3.	Основни поими на фази системите	117
7.4.	Аритметички операции со фази броеви.....	120
7.5.	Фази контролер за реално управување со ВСС	124
7.5.1.	Фази систем	126
7.5.2.	Идентификација на влез и излез во системот и нивниот ранг	131
7.5.3.	Функции на припадност	132
7.5.4.	База на фази правила.....	136
7.5.5.	Верификација на фази контролерот	138
7.6.	Рангирање на фази броеви	142
8.	Користена литература.....	145

1. Основи на оптимизацијата на хидросистемите

1.1. Особини на ВСС значајни за оптимизацијата на ВСС

Под процес на управување со водостопански систем (ВСС) се подразбира планирање и користење на системот. Всушност, тоа се две управувачки задачи со различен број управувачки координати. Под математичко моделирање на управувачка задача со ВСС се подразбира креирање на модел за системот и алгоритам за управувачката процедура (оптимизациона и/или симулациона). За да се согледаат: (а) сите суштински проблеми при математичкото моделирање на управувачките задачи со ВСС, како и (б) сложеноста на процесот на управувањето со ВСС, неопходно е да се систематизираат оние особини на ВСС (прикажани на [слика 1.1](#)), кои се релевантни за решавање на задачите на управување со ВСС. Во продолжение ќе бидат подетални разработени особените на ВСС кои се значајни за оптимизацијата на овие системи: (3) спротивност на интереси и (8) стохастички карактер.



Сл. 1.1. Карактеристики на ВСС и нивно влијание во водостопанските планирања

(3) Спротивност на интереси. Може да се каже дека практично сите корисници на повеќенаменскиот ВСС се наоѓаат во меѓусебна опоненција, барем по еден од повеќето можни аспекти. Оваа спротивност на интересите се манифестира при: избор на локацијата на одделни делови на системот, саканиот начин на користење на заедничките објекти, распределбата на водниот ресурс и алокацијата на инвестициите и годишните трошоци за заедничките објекти. Со оптимизацијата не може дури ни теоретски да се најде решение кое ќе биде оптимално за сите водокорисници. Оваа особина на ВСС ја наметнува потребата од вклучување на повеќекритериумска (векторска), оптимизација при изнаоѓањето компромисно решение за ВСС.

(8) Стохастички карактер. ВСС е подложен на цела низа од неизвесности кои се однесуваат на: влезот во системот, состојбите на системот, бараниот излез, моделот, целите, критериумите, ограничувањата, и економските параметри.

Неизвесноста на влезот произлегува од стохастичкиот карактер на хидролошкиот процес, чија реализација никогаш не е однапред позната. При планирањето на ВСС може да се користат: (а) забележани хронолошки низи (детерминистички пристап на синтеза на системот), (б) синтетички низи генерирани со екстерен естиматор (имплицитен стохастички пристап), и (в) закони за дистрибуција на веројатност за влезните големини (експлицитен стохастички пристап). Кога се донесува одлука за оперативно управување со ВСС, се работи со прогнозиран влез. Тогаш информацијата е недоволна и задачата се претвора во проблем на адаптивно управување, со постојано присутна корекција на управувачката стратегија, во склад со постапно собраните информации.

Неизвесностите на моделот се резултат на непотполното познавање на операторот на пресликувањето на системот. На највисоко ниво на апстракција моделот за ВСС може да го претставиме како пресликување на влезот во излез. Причините за нецелосното познавање на операторот се: (а) преголемата сложеност на моделот за дескрипција на физичките процеси во комплексните ВСС, и (б) променливоста на параметрите кои фигурираат во моделот во тек на времето.

Неизвесноста на бараниот излез, произлегува од стохастичкиот карактер на потребите на некои водокорисници на ВСС: наводнување, оплеменување на мали води, хидроенергетско производство, итн. При планирањето на ВСС со имплицитниот стохастички пристап неопходен е надворешен естиматор во кој би се симулирале вредностите на бараниот излез во корелација од синтетичките низи на основните хидролошки и метеоролошки големини.

Неизвесноста на целите е резултат на промените на економските параметри за дефинирање на добивките и штетите, бараната ефективност на ВСС, итн.

Неизвесноста на состојбата е предизвикана од невозможността за точно познавање на сите компоненти, со кои се дефинира состојбата на системот во процесот на управување. Овие компоненти се однесуваат на: волумен на вода во акумулацијата (поради засипување со нанос), ниво на вода во подсистемот за транспорт (поради деформации во речното дно), и сл.

Од аспект на количините на релевантни информации, неопходни за управување со системите, разликуваме: (а) системи со доволни информации и (б) системи со недоволни информации, (со неизвесности), каде што секако припаѓаат ВСС. Наведените бројни неизвесности на ВСС наметнуваат во управувањето со ВСС да се обезбеди силна информациона поддршка, со помош на Управувачки Информационен Систем (УИС). УИС (Management Information System - MIS) за ВСС претставува низа од модули, со кои се овозможува: собирање, меморирање, ажурирање и обработка на огромен фонд на разновидни информации. УИС има за цел да му помогне на доносителот на одлуката при изборот на управувањето со ВСС, но не и да го ослободи од одговорноста.

1.2. Кибернетски пристап во науката за водостопанските системи

Со развојот на комплексите ВСС, за решавање на сè посложените управувачки задачи (планирање и користење) со системите, неопходна е примена на современи нумерички методи. За правилно да се спроведат нумеричките експерименти во областа на ВСС, потребни се елементарни познавања од Теорија на информации и Теорија на системи. Затоа, во оваа точка ќе биде даден концизен приказ на: (а) кибернетскиот пристап во науката за водостопанските системи и (б) влијанијата на кибернетиката врз развојот на моделирањето на управувањето со ВСС. Овие поими, во натамошниот текст ќе бидат опишани на највисоко ниво на апстракција - соодветно на проблематиката што ја третираат.

1.2.1. Кибернетика - генерални принципи на управување со системите

Како што е добро познато, човештвото поминало низ две технолошки револуции. Првата револуција е механичко - енергетска, и се поврзува со усовршувањето на парната машина од James Watt¹ (Џејмс Ват), во втората половина на XVIII век. Втората револуција е информатичко - управувачка, и се поврзува со: (а) појавата на првите пресметувачки машини во 1943 година и (б) раѓањето на кибернетиката², како нова научна дисциплина, во средината на XX век. Настанувањето на Кибернетиката вообичаено се поврзува со издавањето на книгата „Кибернетика, или управување и комуникација кај живите суштества и машините“ од Norbert Wiener³ (Норберт Уинер) во 1948 година.

Кибернетиката е наука во која се истражуваат најразлични системи, способни да примаат, чуваат и преработуваат информации, во процесот на управување и одлучување. Според класичната претстава за техничките системи, во нив се извршува одредена трансформација на два вида на ресурси: материја и енергија. Со етаблирањето на Кибернетиката се проширува ваквиот класичен концепт, со нов елемент - информација. Кибернетиката е дисциплина каде во преден план се става трансформацијата на информациите во процесот на

¹ J. Watt (1736-1819), Шкотски пронаоѓач и машински инженер, познат по неговите усовршувања на парната машина. Неговите први истражувања датираат од 1755-та година, при подобрување на парни машини за водни пумпи. Првиот пронајдок го патентирал во 1769-та година. Најпознатиот пронајдок, по кој е запомнет како пронаоѓач на парната машина, е центрифугалниот автоматски регулатор на брзина, од 1788 година. Во тој механизам, актуелен и во денешно време, за прв пат е содржан принципот на повратна спрега на сервоуред - поврзување на излезот со влезот, што е базичен концепт на автоматизацијата. Основната единица за снага во SI системот е именувана во негова чест.

² Зборот кибернетика потекнува од старогрчки збор кој означува кормиларење, управување.

³ N. Wiener (1894-1964), професор на Massachusetts Institute of Technology (MIT), USA, и автор на повеќе книги: “Cybernetics“ (1948), “The Human Use of Human Beings“ (1950), “Nonlinear Problems of Random Theory“ (1958), “The Tempter“ (1959). Според овој научник, базните принципи на управување со различните системи (технички, економски, биолошки, социолошки) се исти.

управување и одлучување. Со употребувањето на информациите при носењето на управувачките одлуки, тие стануваат ресурс, кој има своја вредност и цена (Pauše Ž., 1980.).

Основните карактеристики на Кибернетиката, кои имале најголемо влијание врз развојот на науката за Водостопанските системи, и кои ги стандардизирале најзначајните концепти во процесот на решавање на управувачките задачи со ВСС, се следниве:

- (1) Системски приод. Теоријата на системите е повеќе методика на научно спознавање, отколку теорија во потесна смисла. При истражувањето на сложените ВСС, тие се разложуваат на подсистеми, па посебно се разгледуваат нивните меѓусебни интеракции, како и врските со опкружувањето. Процесот на системска декомпозиција се прави сè додека не се спушти нивото на сложеност на системот до посакуваното поедноставување, при кое системот може да се реши на задоволителен начин.
- (2) Јасно дефинирани цели. Управувачките задачи со системите може да бидат решени само доколку имаат јасно дефинирани цели. Врз основа на целите на управувањето, со постепен премин од вербален опис до математичка формализација, се добиваат егзактни критериуми за вреднување на управувачките одлуки и разгледуваните варијантни решенија за системот.
- (3) Информационен приод. Информацијата е ресурс само доколку благовремено се употреби во процесот на донесување на одлуки. Вредноста на информацијата е во корелација со временската компонента, односно информацијата како ресурс се обезвреднува со тек на времето.
- (4) Математичко моделирање. Системите математички се моделираат, за потоа на нив да се добие одговорот за однесувањето на системот, ако се реализира одредено управување. На тој начин се експериментира со моделот, а не со прототипот, со што се избегнуваат неповолните последици за реалниот систем предизвикани од евентуалното погрешно управување.
- (5) Пробабилистички концепт. Во самиот ВСС постојат низа неодредености, и една од најзначајните особини на ВСС е дека од опкружувањето врз системот дејствуваат бројни случајни пореметувања. Затоа, управувачките одлуки со ВСС треба да се третираат како стохастички категории и пожелно е да се поврзат со одредени пробабилистички концепти: обезбеденост, поузданост, веројатност на состојби, итн.

1.2.2. Информации, системи - дефиниција и класификација

Во современиот пристап за проучување на различни природни феномени е карактеристично што објектите за истражување се третираат како одредени системи, со две основни координати - состојби и управувања. Во тек на функционирањето на системот, тој влегува во одредени состојби, така што во секој момент од процесирањето на системот, може да се зборува за состојба на системот (Кралев Т., 1984.). Во реалните системи, параметрите кои ја опишуваат состојбата на системот редовно се меѓусебно зависни - во смисла дека промената на еден параметар влијае врз однесувањето на другите параметри. Една од

главните цели на научното истражување во егзактните науки е токму откривањето на врските меѓу одделните параметри за дескрипција на состојбите при функционирањето на системите.

Во најопшта смисла, би можело да се каже дека секој систем со промена на состојбите генерира одредена информација. Информацијата е апстрактен поим, па затоа е доста нејасна и неодредена. Од кибернетски аспект, информацијата е основен фактор на управувачкиот процес, или врска помеѓу системот кој управува и системот кој е управуван. Според N. Wiener „Информација се вика содржината на тоа што го разменуваме со надворешниот свет, додека му се прилагодуваме и додека влијаеме врз него со своето приспособување“. Според многу карактеристики (постојаност, трансформација), информацијата може да се подигне на ист ранг како и материјата и енергијата. Суштинската разлика меѓу информацијата и другите две компоненти на системите (материјата и енергијата), е дека таа не може независно да егзистира од човекот. Или поедноставно, човекот е тој што ја создава информацијата, а не природата.

Основно својство на сите системи е што со тек на време тие се стремат да се дезорганизираат. Според научниците од „Теорија на системите“ - најмалку веројатен е редот, а најмногу веројатна е состојбата на хаос. Мерката за неодреденост на системите се нарекува ентропија. Основна тенденција на неодреденоста (или ентропијата) е постојано да се зголемува. Според N. Wiener „Како што ентропијата е мерка за дезорганизираност, така информацијата е мерка за организираност“. Со информациите се намалува неодреденоста во одлучувањето при управување со системите. Добра информација е онаа што придонесува да се добијат поголеми сознанија при изборот помеѓу повеќе можности или при решавање на одреден проблем. Според C. Shannon⁴ „Онаа вест што е помалку веројатна носи поголемо количество на информации“.

Во математичката интерпретација на поимот информација, количината на информации “I” се изразува како разлика меѓу неодреденоста во одлучувањето (или ентропијата), пред H_1 и после примањето на информацијата H_2 , според следниот израз:

$$I = H_1 - H_2 \quad (1.1)$$

Ентропијата “H” се пресметува со следната релација:

$$H = - \sum_{i=1}^n P_i \log_2 P_i; \quad \sum_{i=1}^n P_i = 1.0 \quad (1.2)$$

каде што: P_i е веројатност на појава на $i^{\text{та}}$ можност, а “n” е вкупен број на можности.

Единица за количина на информации е еден бит⁵. Еден бит е количество на информации кое ја отстранува неопределеноста при одлучувањето меѓу две

⁴ Shannon Claude Elwood (1916 -), Амерички електроинженер и математичар кој се смета за втемелител на теоријата на информациите. Во 1948 година ја објавил книгата “A Mathematical Theory of Communication” каде изградил одредени математички модели за опис на суштинските феномени во техничките комуникациски системи.

⁵ Кратенка од binary digit - бинарен број.

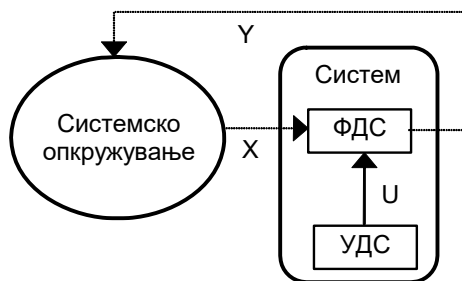
подеднакво веројатни појави. Или, систем со две подеднакво веројатни појави, има ентропија еднаква на еден, што може да се согледа од следнава релација:

$$\text{Ако: } P_1 = P_2 = \frac{1}{2}, \quad \text{Тогаш: } H = -2 \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = -1(-1) = 1 \quad (1.3)$$

Најопшта дефиниција за „систем“ би била дека, под систем се подразбира целина составена од меѓусебно поврзани компоненти ориентирани кон одредена цел. Основните особини на системот се следниве:

- (1) во него се извршуваат трансформации на материја, енергија и информации;
- (2) системот е целина, или множество на елементи, што е издвоена од опкружувањето, и
- (3) целите на системот се реализираат преку постојана интеракција со околината и преку врските меѓу неговите составни делови.

Од кибернетска гледна точка, клучна карактеристика на системот е дека може да се разложи на два дела: физички дел на системот (ФДС) и управувачки дел на системот (УДС), [слика 1.2](#). Раздвојувањето на ФДС (hardware) од УДС (software) е воведено од N. Wiener, и со него се овозможува во истражувањето, наместо реалната физичка структура, да се воведи неговиот математички модел.



Сл. 1.2. Кибернетска шема на систем

Со раздвојувањето на ФДС (објект на управувањето или дел со кој се управува), од УДС (дел кој го подготвува и спроведува управувањето), потребно е да се создаде врска меѓу двата дела. Оваа дополнителна врска во системот, се остварува со воведување на управувањето “U”, како дејство врз објектот, со цел да се подобри неговото функционирање. Подобреното функционирање на системот е мерливо преку заштеда на материјални и енергетски ресурси. Управувањето подразбира користење на информации, кои со тоа здобиваат третман и вредност на ресурс. Вредноста на информацијата како ресурс е еквивалент на вредноста на заштедата на материја и енергија - што била остварена поради примената на соодветна информација во управувачкиот процес.

Од аспект на науката за Водостопанските системи најважни се класификациите на системите според следниве критериуми:

- (1) постанок (природни и вештачки);
- (2) размена на ресурси со околината (отворени и затворени);
- (3) одреденост (детерминистички и стохастички);
- (4) математичка дескрипција (потполни и редуцирани);

- (5) постоење во реалниот свет (реални и апстрактни);
- (6) контролабилност (управливи и неуправливи);
- (7) динамичност според времето (статички и динамички);
- (8) стабилност кон ориентираната цел при пореметувања (стабилни и нестабилни);
- (9) постоење на повратна спрега (системи без и со повратна врска), и
- (10) начин на функционирање (природни - физички, технички и кибернетски).

1.2.3. Директни и повратни врски во системите

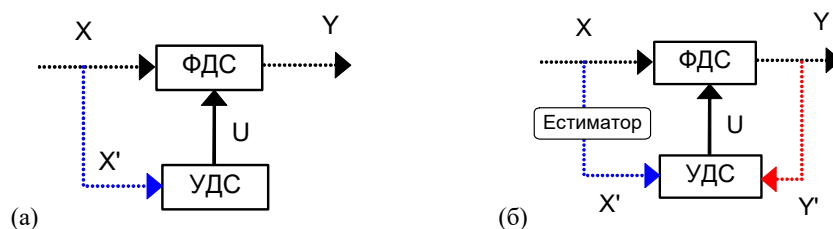
Кај реалните системи, врските (или спрегите), се канали за размена на: материја, енергија и информации. Врските се делови од системот, со кои се остварува поврзаноста и заедничкото дејство на сите елементи од системот. Со раздвојувањето на ФДС и УДС, во системот се разликуваат два вида на врски:

- (1) директни, со смер на информациите од УДС кон ФДС, и
- (2) повратни (или рекурентни), со спротивен смер на информациите, односно од ФДС кон УДС.

Во зависност од постоењето на повратните спреги во системот, постојат две класи на системи: со повратна спрега и без повратна спрега.

Системите **без повратна спрега** во управувачкиот процес не ги користат информациите за вредностите на излезните големина “Y” од ФДС, кои се реализирани во претходниот процес на управување, [слика 1.3.\(а\)](#). Тоа се системи со фиксен програм на управување, кои се карактеризираат со ниска ефективност. Извесни подобрувања на овие системи се добиваат доколку се управува со набљудување на влезот во системот “X”, што се постигнува со користење на набљудуваните информации X' за влезната големина “X” во УДС.

Системите **со повратна спрега**, информацијата за реализираниот излез “Y” од ФДС, ја пренесуваат во УДС во вид на повратна информација. Односно, УДС ја користи измерената информација Y' за излезната големина “Y” при следното управување, [слика 1.3.\(б\)](#).



Сл. 1.3. Системи: (а) без повратна спрега, (б) со повратна спрега Y'

Врската помеѓу излезот “Y” - управуваната големина од ФДС, и УДС се нарекува повратна спрега Y'. Според N. Wiener „Повратната спрега е способност за подесување на идните постапки - врз основа на претходните дејствувања“. Постојат два вида на повратни спреги:

- (1) позитивна, која го засилува излезниот процес, односно дејствува како стимулатор на дотогашните трендови на однесување на системот или дејствува во ист смер со надворешните влијанија, и

- (2) негативна, која дејствува стабилизаторски и го намалува отстапувањето меѓу бараниот и реализираниот излез од системот.

Системите со повратна врска имаат зголемена стабилност и ефективност, споредени со системите без повратна врска. Постојат три можности за унапредување на системите со повратна спрега:

- (а) управување со естимирање,
- (б) управување со самотренирање, и
- (в) управување со самоорганизација.

Под естиматор се подразбира екстерен математички модел кој може да има двојна функција:

- (1) во задача на анализа во реално време (во фаза на користење на изграден систем), за прогноза на влезните големини, и
- (2) во задача на анализа содржана во задача на синтеза (во фаза на планирање на систем), за генерирање на синтетички сценарија за влезните големини, со што се овозможува проектирање на системите со зголемена доверливост.

Управувањето со самотренирање значи дека системите може да го модифицираат програмот и алгоритмот на управувањето, врз база на искуството стекнато во тек на минатата работа. Управување со самоорганизација е највисоко ниво на развој на системите, што подразбира промена на структурата на системот, ако со тоа се смалува ентропијата и се зголемува ефективноста на системот.

1.2.4. Кибернетски опис на водостопанскиот систем

Водостопанските системи се комбинација од природни (хидрографска мрежа и земјиште) и вештачки (хидротехнички објекти) системи. ВСС се отворени системи според критериумот - размена на ресурси со опкружувањето. ВСС се изразито стохастички, реални, управливи и динамички системи. Независно од големиот напредок на информатичките алатки, ВСС спаѓаат во категоријата на редуцирани системи - според можностите за математичко моделирање. При планирањето на ВСС, едно од најважните барања е да се постигне стабилност на системот, што се овозможува со создавање на повратни спреги. Според начинот на функционирање на ВСС, на највисоко ниво на развој - во фазата на комплексните системи, преминуваат во класата на кибернетски системи. Основна карактеристика на кибернетските системи е постоењето на информационо-управувачки дел за зголемување на ефективноста на системот.

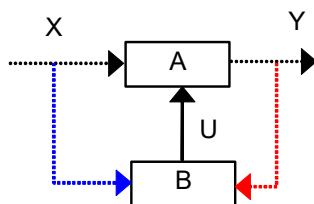
Современите ВСС треба да се планираат како системи со повратна спрега, а поголемите ВСС треба да се дополнат со примена на концепциите: естимација, самотренирање и самоорганизација. Ефикасноста на ВСС наменет за: одбрана од поплави (ретензија или задржување на големите води), и хидроенергетско производство, директно зависи од естиматорот за прогноза на доаѓањето на поплавиот бран. Така на пример, доколку е некавалитетно естимиран обликот и врвната вредност на хидрограмот на големите води: (а) при недоволно предпразнење на акумулацијата, може да се поплави низводната долина, или (б) со прекумерно празнење на акумулацијата, ќе се генерира помало производство на снага и енергија со ХЕЦ. Може слободно да се констатира дека

хидромелиоративните системи и пречистителните станици може да го унапредат функционирањето единствено со самотренирање, бидејќи релевантното емпириско искуство кај овие системи се стекнува дури во тек на експлоатација. Поврзувањето на парцијалните подсистеми во сложен ВСС е прилагодување на системот на промените во неговото опкружување, сè со цел да се подобри неговата ефективност, што претставува облик на самоорганизација - промена на структурата на системот.

Водостопанскиот систем, разложен на ФДС и УДС, како систем “С” со повратна спрега (слика 1.4) се дефинира преку две пресликувања:

$$C = \langle A, B \rangle; \quad A: X * U \Rightarrow Y; \quad B: X * Y \Rightarrow U \quad (1.4)$$

Првото пресликување “А” го опишува ВСС како објект на управувањето, а второто пресликување “В” го опишува управувачкиот објект, врз основа на повратната спрега. Од тука произлегува суштината на управувањето со ВСС, дека управувањето “U” е последица на следењето на влезот “X” и излезот “Y”, кој дејствува како повратна спрега (рекурентна врска).



Сл. 1.4. Кибернетска шема на ВСС

Параметрите на ФДС се сите големина кои се определуваат со решавање на задачата на синтеза (планирање) на системот: големина на акумулација, инсталираност на хидроцентрала, капацитети на зафатни градби, димензии на деривации, капацитети на пречистителни станици. Параметрите на УДС се избираат или во тек на планирањето: софтверска поддршка, процесор за управување, информации врски, или во тек на експлоатацијата на изграден ВСС: програм со оперативна политика за подигнување на работните перформанси на системот.

1.3. Математички модели на управување со ВСС

При изработка на математички модел (ММ) можни се три вида на дескрипција на водостопанскиот систем:

- (1) *функционален опис* - го формализира физичкото однесување на системот во тек на сите работни процеси;
- (2) *морфолошки опис* - ги утврдува врските на подсистемите на сложениот ВСС;
- (3) *информационен опис* - ги дефинира количината и квалитетот на информациите како ресурс во процесот на управувањето со ВСС.

Суштината на управувањето на ВСС со акумулација (третирајќи го како систем со повратна спрега), во рамките на функционалната дескрипција на ВСС, е дека управувањето е резултат на примената на директниот влез и следењето на развојот на излезот. На највисоко ниво на апстракција, ВСС може да се опише со соодветно пресликување (или трансформација), на водниот ресурс од сфера на природна состојба во некоја барана состојба на користење и уредување.

Трансформациониот оператор, кој го опишува ВСС и соодветното управување се состои од две компоненти: hardware - физички дел на системот, и software - управувачки аспекти на ВСС. Задачата на управување со ВСС се сведува на дефинирање на операторот на пресликувањето, кога се познати водните ресурси, по простор (локација), протекување и квалитет, во природна и барана состојба.

По однос на математичкото моделирање на задачата на управувањето со системите треба да се истакне дека постојат две основни класи на управувачки проблеми: (1) лесно (или добро) структурирани, и (2) тешко (или лошо) структурирани. Во класата на добро структурирани управувачки проблеми спаѓаат проблемите кои може да се формулираат и опишат со комплетни математички модели. Еден управувачки проблем е добро структуриран ако ги исполнува следниве услови:

- (а) неговиот ММ може прецизно да се формулира;
- (б) целите кои треба да се остварат, може да се специфицираат во потполно дефинирана целна функција;
- (в) можно е да се определат сите ограничувања на процесот во системот, и
- (г) постои алгоритам за детерминирање на оптималното решение.

Во класата на тешко структурирани управувачки проблеми спаѓаат проблемите кои не може да се формализираат, или е можна само фрагментарна формализација. Карактеристики на лошо структурираните управувачки проблеми се:

- (а) не постојат соодветни ММ, или ако постојат тие се некомплетни и со груби апроксимации, и
- (б) не постои нормативен метод за определување на оптимално решение.

При истражувањето на управувањето на системите, зависно од нивната сложеност, разликуваме два пристапи:

- (1) опишување со физички закон, и
- (2) опишување со модел.

Егзактното опишување со физички закон е кај системите кои се добро организирани, и кај кои анализираните појави и процеси зависат од мал број параметри. Кај овие системи се дозволува постоење на повеќе почетни хипотези, но на крај се докажува една од која се изведува дефинитивен закон. Така, законот добива карактер на апсолутна категорија, или е безусловно точен и тогаш важи, или е неточен и се отфрла. Опишувањето со модел е за сложени системи каде осознавањето на појавите и процесите е во класата на тешко структурирани проблеми. Математичкиот модел за разлика од егзактниот закон не смее да се третира како апсолутна категорија.

Преминот кон управување со сложените системи со примена на ММ доведува до промена на гносеолошки (или спознаен) план. Оваа гносеолошка промена се однесува на следново - наместо **закон**, кој според традиционалното образование го бараме во појавите и процесите, се воведува суштински нов поим **модел**. Основни карактеристики на моделот се следниве:

- (1) моделот колку и да е детален, сепак претставува само една од можните математички апроксимации на реалниот систем;
- (2) различните модели за опишување на еден ист систем не се меѓусебе во опоненција, туку може да се зборува за повеќе или помалку потполни (или детални) модели, или за модели со различно ниво на обработка, и
- (3) моделот има задача да му помогне на планерот, да му даде релевантни податоци за согледување на проблемот, а не да го замени, посебно не да го ослободи од одговорноста при донесувањето на управувачката одлука.

Од наведените карактеристики на математичките модели произлегува клучната филозофија на моделирањето при решавање на управувачките задачи со ВСС. Таа се опишува со следнава размисла - моделот не претставува некаков непогрешлив апарат со кој ќе се предвиди одговорот на системот, туку моделирањето е реитеративен процес за постапно осознавање на управувачкиот проблем, со што моделот станува корисна и помошна алатка при донесувањето на управувачката одлука.

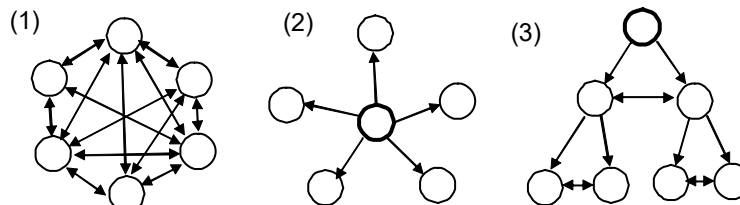
1.4. Управување со сложени водостопански системи

Сложените ВСС (составени од повеќе елементи или подсистеми) може да се поделат на две класи: *адитивни* (системи кои може да се третираат како сума на составните елементи) и *интегративни* (системи кај кои после поврзувањето се јавува нов квалитет кој е резултат на меѓусебните интеракции на подсистемите. Во интегративните системи спаѓаат комплексните ВСС, поради зголемувањето на пробабилистичката ефективност и поузданоста на системот како последица од поврзувањето на подсистемите. Со зголемување на сложеноста на ВСС нивните модели стануваат сè погломазни и со покомплицирани информациона текови. Затоа, за управување со сложените ВСС се разработуваат посебни модели кои се базираат врз: хиерархиска организација, декомпозиција и агрегација, повеќекритериумска оптимизација.

1.4.1. Хиерархиска организација

Од аспект на организацијата на управувањето со сложените системи се разликуваат три класи на структури, [слика 1.5](#):

- (1) *децентрализирана* (каде сите елементи се меѓусебно независни),
- (2) *централизирана* (каде сите елементи се поврзани со единствен надреден елемент, кој ја координира работата со целокупниот сложен систем), и
- (3) *хиерархиска* (за која практиката потврдила дека е најефикасна организација на управување со ВСС со висок степен на сложеност).

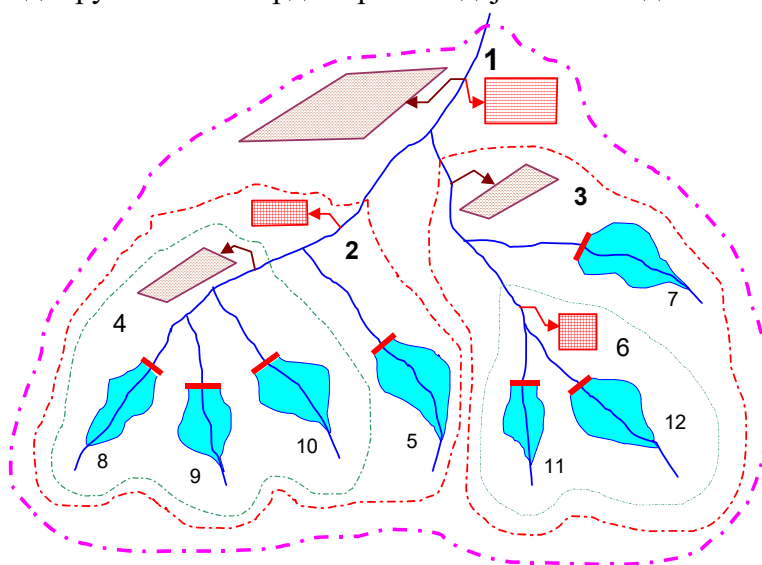


Сл. 1.5. Структури на организација на управувањето со сложени системи: (1) децентрализирана, (2) централизирана и (3) хиерархиска

Под хиерархиска организација се подразбира таков начин на поврзаност на подсистемите со кој се овозможува најголема ефикасност на сложениот систем и позитивен синергетски ефект од координираното дејство. Хиерархијата може да се разгледува како рамнинска структура, организирана така што повеќе елементи сочинуваат еден подсистем, повеќе подсистеми создаваат поголем подсистем од повисок ред, сè до конечниот комплексен систем. Сложениот ВСС со хиерархиска организација формира гранкаста структура, која најдобро се прилагодува на реалната структура на хидрографската мрежа (слика 1.6.1). Кај хиерархиската организација на сложениот систем (прикажан на слика 1.6.2), апстрактниот математички модел е организиран на повеќе управувачки нивои.

Во системите со хиерархиска структура на организацијата на управувањето разликуваме три вида на информациско управувачки канали:

- (а) вертикални према долу γ_i - координирани управувања од супремална единица (управувачки надредена), кон инфимална единица (управувачки подредена);
- (б) вертикални према горе δ_i - информации и барања за нови инструкции, од инфимална кон супремална единица; и
- (в) хоризонтални двосмерни ψ_i - информации меѓу единици на исто управувачко ниво, за подобрување на координираното дејство на подсистемот.



Сл. 1.6.1. Гранкаста структура на поврзаност на елементите од сложен ВСС

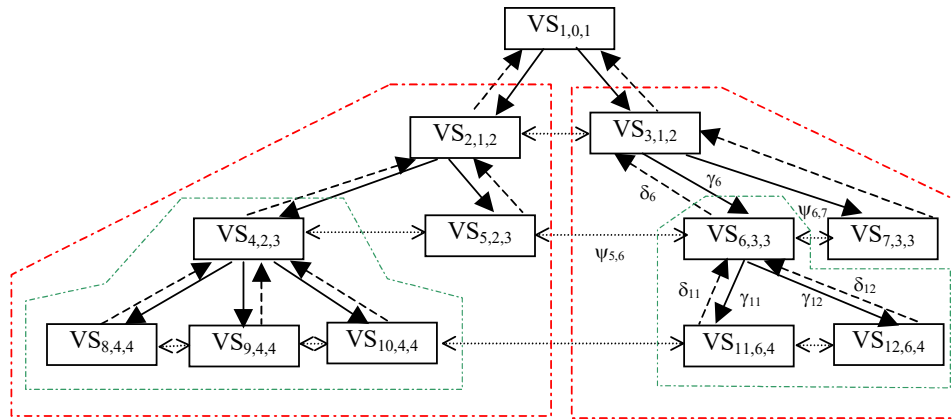
Разложувањето на сложениот водостопански систем на “I” подсистеми симболично се претставува со следната релација:

$$VS = \langle VS_1, VS_2, \dots, VS_i, \dots, VS_I \rangle; \quad i = 1, I \quad (1.5)$$

Каде $i^{\text{тиот}}$ подсистем, како систем со повратна спрега, може да се опише со две пресликувања, кои се однесуваат за физичкиот и управувачкиот дел на системот:

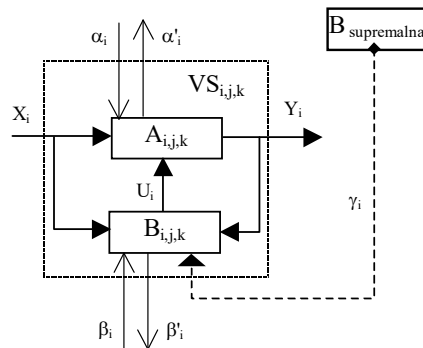
$$VS_i = VS_{ijk} = \langle A_{ijk}, B_{ijk} \rangle \quad (1.6)$$

Во горната релација со трите индекси се означуваат: $i^{\text{ти}}$ реден број на елементот, кој има $j^{\text{ти}}$ супремален елемент, и се наоѓа на $k^{\text{то}}$ хиерархиско ниво на управување.



Сл. 1.6.2. Гранкаста структура на поврзаност на елементите на систем со хиерархиска организација

Кај сложените системи пресликувањата: A_{ijk} и B_{ijk} се усложнуваат поради меѓусебните односи на подсистемите (слика 1.7). Интеракциите се секогаш двосмерни: α_i од ФДС на сложениот систем кон ФДС на $i^{\text{тиот}}$ подсистем, α'_i од ФДС на $i^{\text{тиот}}$ подсистем кон ФДС на сложениот систем, и аналогно за УДС се интеракциите β_i и β'_i . Кибернетската шема на подсистемот (покрај наведените врски), се надополнува и со γ_i директното координирано управување од супремалната единица.



Сл. 1.7. Кибернетска шема на подсистем од сложен систем со хиерархиска организација

Со наведените дополнителни интеракции, пресликувањата во потполниот апстрактен математички модел, на подсистемот од сложениот ВСС со хиерархиска организација, симболично се означуваат на следниот начин:

$$\begin{aligned} A_{ijk} : X_i * U_i * \alpha_i &\Rightarrow Y_i * \alpha'_i \\ B_{ijk} : X_i * Y_i * \beta_i * \gamma_i &\Rightarrow U_i * \beta'_i \end{aligned} \quad (1.7)$$

1.4.2. Декомпозиција и агрегација

Суштината на декомпозицијата (или разложувањето) на сложениот ВСС се состои во следново - проблемот на моделирање на: физичкиот систем и управувачката процедура (симулациона и/или оптимизациона), кој е премногу сложен и повеќедимензионален, се разложува на подпроблеми со помала сложеност и димензионалност, кои може успешно да бидат решени. Декомпозицијата на сложените ВСС, во рамките на водостопанските

истражувања, може да се изврши по следниве четири основи: функција, територија, време и нумерика.

Кај декомпозицијата според **функција**, сложениот ВСС се разложува на подсистеми според водостопанските функции, цели и намени. Користејќи математички модели за потполно различни функционални структури, многу поедноставни од структурата на сложениот ВСС, значително се олеснува задачата на моделирањето кое зависи од функциите на подсистемот. Така на пример, сложените ВСС може да се разложат на следните парцијални делови:

- (1) подсистем на акумулација (каде основна релација е билансната равенка за промената на волуменот во корисниот простор),
- (2) подсистем за хидроенергетика (каде се применуваат енергетски релации за снага, енергија, коефициент на корисно дејство),
- (3) подсистем за струење на водата (со изрази за нестационарно струење во отворени корита од хидрографската мрежа, доколку времето за патување на брановите е помало од временската рамка на управувачката задача),
- (4) подсистем за дистрибуција на водата во хидромелиоративните или водоводните мрежи, итн.

Со декомпозицијата според **територијален** принцип, сложениот ВСС се разложува на подсистеми со заокружени хидрографски целини (слика 1.6.1). Пожелно е границите на оваа декомпозиција по простор да се усвојат за оние локации на хидрографската мрежа кои се битни од аспект на следење на промените на водните режими: влив на притоки, профили непосредно низводно од акумулациите, и сл.

Кај декомпозицијата по **време**, прво се утврдуваат глобалните управувања во долги временски интервали, а потоа постапно се оди на пократки интервали од временската дискретизација. Така на пример, во водостопанската анализа на акумулациона ХЕЦ, прво, преку сезонско управување (во период од неколку десетици години), се опфаќа феноменот на натрупување на сушни и водни години. Потоа, со часовно управување (во период од еден месец, со гранични вредности за состојбите превземени од првото управувачко ниво) се добива капацитетот на анализираната ХЕЦ за производство на врвна снага и енергија.

Со **нумеричката** декомпозиција се разложува пресметувачкиот проблем на подпроблеми (каде најчесто се користи некој итеративен циклус), и од помалку точни решенија се доближуваме кон попрецизни резултати. Овој пристап е најчесто присутен кај оптимизационите управувачки процедури за сложените ВСС, каде точноста на нумеричкото (или приближното) решение е во директна корелација со големината на прирастот на состојбите во управувачката задача. Така во управувачките задачи за сложени ВСС со огромни акумулациони базени, во првиот чекор се усвојува груба дискретизација на состојбите, со што се определува иницијална траекторија на состојби (односно почетна исполнетост во акумулацијата во тек на времето). Во втората итерација, околу иницијалната траекторија од првиот чекор, се формира лентовиден коридор, но со попрецизна дискретизација на состојбите. Ваквиот процес продолжува сè до проценката дека со новиот итеративен циклус – или прирастот на состојбите е премногу мал или

релативното подобрувањето на критериумот (како мерка за вреднување на управувањето), има занемарлива вредност.

Со примената на декомпозицијата по сите основи, управувачкиот проблем не се упростиува, туку напротив, се овозможува математичко моделирање на повисоко ниво, што резултира со поточна пресметка. Со разложувањето на сложениот систем на подсистеми, се раскинуваат постојните физичките врски во системот и се заменуваат со нови интеракциски членови. Значи, вкупниот број на променливи во управувачката задача се зголемува, доколку се примени декомпозиција, меѓутоа, задачата се сведува на подпроблеми, кои може попрецизно да бидат решени - што е клучната идеја на концептот на декомпозицијата.

Агрегација (или обединување) на ВСС е инверзна постапка во однос на декомпозицијата (разложувањето). Со агрегацијата, системите кои управувачки биле независно третираны се поврзуваат во сложен систем - со единствена управувачка политика. Принципот на агрегација е применлив кога ВСС се развива постапно (со изградба на независни објекти и подсистеми), кои потоа се спојуваат во сè позависна и поповрзана целина. Задача на агрегација е да ги поврзи посебно третираните подсистеми во единствен сложен ВСС со хиерархиско управување. Агрегацијата е значајна доколку постои можност за позитивен синергетски ефект, односно каде што ефектот од управувањето со сложениот ВСС е поголем од сумата на ефектите на независните управувања со одделните подсистеми.

1.4.3. Цели и критериуми на сложените системи

Кај сложените ВСС, со хиерархиска организација на управувањето, **целната** структура се формира по принципот на разгрането стебло, со различни нивоа на значајност, и со подсегменти во кои се групирани целите во одделните водостопански сфери за: користење, уредување и заштита на водите. Целите кај сложениот ВСС се формираат како хиерархиска структура организирана на повеќе нивоа, во склоп на јасна целна структура, со прецизно утврдени врски помеѓу одделните цели. Ова е значајно, за да се елиминира опасноста од промена на релевантноста на одредени цели, односно да не дојде до замена на стратемиските со оперативни цели, или споредните цели да ги потиснат во втор план главните цели. При тоа се можни два пристапи:

- (1) од општо кон детално, top down, каде прво се дефинира генералната цел на целиот ВСС, а потоа се поставуваат целите на неговите подсистеми, и
- (2) од детално кон општо, bottom up, каде се поаѓа од конкретните цели на одделни корисници, и со нивна постапна агрегација во целната структура, се напредува кон генералната цел на сложениот ВСС.

Првиот пристап се применува при планирање на интегрално уредување на сливното подрачје, при изработка на водостопански основи. Вториот пристап се применува кога планирањето се сведува на конкретно, парцијално и фазно планирање.

Проблемот за избор на **критериум** за управување кај сложените ВСС станува поделикатен поради спротивните интереси и конфликтните односи

помеѓу одделните подсистеми. Критериумот на целиот систем најчесто не е збир од одделните критериуми, ниту пак глобалниот оптимум мора да се поклопува со некој од локалните оптимуми (релевантни за одделните подсистеми). При решавање на управувачките задачи со водостопанските системи може да се случи случајот кога критериумот има сепарабилен карактер (како што е случајот на каскада - серија од проточни хидроцентрали), каде што изборот на критериум за управување се поедноставува и се сведува на сума на енергетската ефективност на одделните ХЕЦ.

1.5. Пристапи во решавањето на управувачките задачи

За управување (планирање и користење) на ВСС се користат повеќе различни методи за решавање на одделни класи на управувачки задачи, при што може да се применуваат следниве пристапи:

- 1) експеримент на реален систем,
- 2) моделирање на системот,
- 3) симулационо управување, и
- 4) оптимално управување.

Управувањето со **експеримент на реален систем**, во домен на потврдување на функционалната сигурност на ВСС, за жал, е многу често присутно во нашата средина. Ова управување го подразбира следново: да се изгради некој ВСС (најчесто придружено со големи инвестиции), за потоа во експлоатација да се констатира - ги исполнува целите за кои е наменет или не ги исполнува, без можност за корекција на физичките параметри на системот. Очигледно е дека со овој пристап не може да се искористат сите перформанси на системот и преголем е ризикот со погрешни управувачки одлуки да се направат огромни штети. Всушност „Науката на ВСС“ (теориски и апликативен дел), е создадена со првенствена цел да се прекине оваа неефикасна пракса на управување со директен експеримент на системите.

Пристапот со **моделирање на системот** подразбира изработка на следниве видови на модели:

- (а) физички (со репродукција на реалниот систем во мален размер),
- (б) аналогни (на пример, со споредба на електричен и филтрационен ток), и
- (в) математички (аналитички – точни, и нумерички - приближни).

Овој пристап најмногу се применува во хидротехничките дисциплини: хидраулика, хидрологија, хидротехнички објекти, хидромелиорации, водоснабдување, како и во бројни градежни науки: геотехника, статика и динамика на конструкции, кои се тесно поврзани со хидротехниката. Хидрауличките модели (физички и/или математички) имаат ограничена примена во водостопанските планирања, и се користат за анализа на специфични проблеми во склоп на сложениот ВСС. Како примери за модели на системи (најчесто нумерички), кои се инкорпорирани во управувачките задачи со ВСС, може да послужат:

- (1) повеќеакумулационен ВСС, каде времето на пропагација на брановите, низ природната хидрографска мрежа или низ каналите, предизвикано од

нестационарниот режим на работа на ХЕЦ во дневниот дијаграм на оптоварување, е покус од временскиот прираст со кој се решава управувачката задача; и

- (2) повеќенаменски ВСС, наменет и за одбрана од поплави, каде времето за распространување на поплавниот бран, во низводната речна долина, секогаш е помало од временската рамка за управување со резервираниот корисен волумен во акумулацијата.

Во наведените два примери на управувачки проблеми со ВСС, во управувачката задача мора да биде вклучен хидраулички модел за нестационарно струење во отворени корита.

Карактеристично за конструктивното моделирање е дека независно од сложеноста на моделот за истражување на однесувањето на реалниот систем, од управувачки аспект - моделирањето со системите е релативно едноставна управувачка задача. Така на пример, истражување на напрегањата за хетерогена брана, со нелинеарни конститутивни модели на зависностите напрегања - дилатации за локалните материјали, со ефективни напрегања добиени со здружена анализа на механичкиот и филтрациониот одговор на конструкцијата, само за себе претставува екстремно комплексен проблем. Меѓутоа, ако задачата се состои во избор на наклон на косини на насипна брана, тогаш, независно од комплексноста на моделот за определување на факторот на стабилност, кој зависи од состојбата на напрегања, управувањето се сведува на едноставен концепт - се бара најстрмниот наклон на косини (или најекономична конструкција), за кој факторот на стабилност не е помал од дозволената вредност на стабилноста за одредена карактеристична состојба на оптоварување.

Со пристапот за **симулационо управување** се овозможува изработка на математички модел на сложен систем на кој се проверува секоја управувачка одлука пред да се примени на реалниот систем. Симулациониот модел треба да даде одговор на следново прашање „Што ќе се случи во системот ако се примени некое управување или ако се промени некој параметар?“ Симулационото управување не поседува оптимизационен апарат и не го дава експлицитно најповолното управување, дури не мора да има ни дефиниран критериумски функционал за вреднување на управувањето.

Генерално, кај симулационото моделирање можни се два приоди: црна и бела кутија. Кај моделот на „црна кутија“ не се познати внатрешните својства на системот, туку се знаат само векторите на влез и излез. Моделот се сведува на определување на операторот на влезно-излезното пресликување, без потреба од суштинско разбирање на трансформациите во системот. Овој модел се применува во следните случаи:

- (а) кога не располагаме со доволна количина на информации за внатрешната структура на системот, и
- (б) кога внатрешната структура на реалниот систем е премногу сложена и нелинеарна за да може аналитички да се формализира.

Моделот на „бела кутија“ е модел во кој покрај влезно-излезното пресликување, познати се некои трансформации - релевантни за управувањето со реалниот систем.

Со симулациониот модел, до најповолната управувачка одлука се доаѓа врз основа на итеративен циклус од нумерички експерименти за симулирање на управувањето и вреднување на варијантите. Симулационите модели за решавање на задачата на анализа на ВСС овозможуваат да се процени ефективната на варијантите со различна оперативна политика, следејќи го одговорот на системот за исто зададено хидролошко оптоварување. Со симулационите модели на управување со ВСС се поддржува реален или секвенционален (чекор по чекор) начин на донесување на одлуки, и затоа симулационото управување е најприменувана алатка при планирањето на ВСС во практиката, за која е изработен броен комерцијален software.

Со пристапот за **оптимално управување** се користат методи за експлицитно да се определи оптималната управувачка одлука, во согласност со претходно дефиниран критериум за вреднување на управувањето (прецизна и јасна целна функција во математичка форма), и зададени ограничувања на состојбите и управувањата кои мора да се почитуваат при реализацијата на процесот. Со оптимизационите модели (базирани на методите на операционите истражувања или математичкото програмирање), се решаваат следниве три класи на задачи: оптимална анализа, оптимална синтеза и оптимален степен на водостопански развој.

* * *

Најсложена задача во планирањето на ВСС, од аналитички аспект, е задачата на анализа на системот, или определувањето на одговорот на системот на зададено хидролошко оптоварување во периодот на експлоатација. За решавање на оваа управувачка задача со ВСС се применуваат следниве модели:

- (1) симулационен,
- (2) оптимизационен, и
- (3) комбиниран.

Во симулациониот модел не постои механизам за да се определи оптималното управување и екстремот на критериумскиот функционал на задачата на анализа на ВСС, па затоа до најповолно управување се доаѓа преку итеративен циклус од нумерички експерименти со различна оперативна политика при ползувањето на водите. Со оптимизациониот модел точно се определува екстремот на целната функција на задачата на анализа и оптималното управување. Но, за примена на оптимизациониот модел неопходно е познавање на комплетната информација на влезните големини во периодот на анализата, што е нереално, па затоа резултатите од оптималното управување се идеализирани. Со комбинираниот модел (развиен со цел да се ублажат недостатоците на симулационото и оптимизационото управување), резултатите од оптималното управување со историските - хронолошки низи на влезни податоци, се инкорпорираат во оперативната политика на симулационен (секвенционален или чекор по чекор) управувачки модел (Karamouz M., Houck M., 1982.), и се генерираат реални и најповолни излезни резултати од управувањето со ВСС.

* * *

Во натамошниот текст, подетално ќе биде разгледана најчестата управувачка задача со ВСС - планирање на ВСС со акумулации, каде се користи оптимизациониот, симулациониот и комбинираниот (оптимизационо - симулационен) пристап во решавањето на задачите на: анализа, синтеза и степен на развој на ВСС.

1.6. Оптимизациони задачи со водостопанските системи

Во седумдесеттите години од XX век доаѓа до коренити промени во поранешните традиционални методи за управување со ВСС. Овие радикални промени се резултат на: (1) суштинските промени во структурата, сложеноста и целите на ВСС, (2) брзиот развој на кибернетските методи за управување со системите, посебно во областа на примената на методите на операционите истражувања за оптимизација на сложените системи, и (3) експлозивниот развој на дигиталната пресметувачката технологија, односно сметачките машини и компјутерските програми (hardware и software).

Оптимизацијата се дефинира како наука која го одредува „најдоброто“ решение на одреден математички дефиниран проблем. Пред 1940-та година релативно малку се знаело за методите на оптимизација, или областа од математичката анализа наречена - операциони истражувања. Методите на операционите истражувања (или математичко програмирање), се користат за изнаоѓање на условен екстрем, каде непознатите големини, покрај во целната функција, фигурираат и во множеството на ограничувања. Оптимизацијата практично настанала после развојот на линеарното програмирање (ЛП), кога почнале да се користат: транспортен проблем (ТП) развиен од Hitchcock во 1941, симплекс методата пронајдена од Dantzig во 1947, а потоа, од 1960, почнале да се развиваат методи за оптимизација на проблеми со нелинеарен математички модел, каде се применуваат: теорема на Kuhn и Tucker, Lagrange-ови множители, динамичко програмирање (ДП), итн. После 1970-та година, со достигнување на висок степен на развој на компјутерите и соодветна софтверска поддршка, настанува брз развој на нумеричките методи за решавање на сите видови на задачи на оптимизација.

Задача на оптимизација на систем е да се изврши избор на најдобра варијанта, од низата на можни варијанти, во смисла на претходно усвоен критериум. Варијантата на системот, што го екстремизира критериумот, се нарекува оптимално решение на оптимизационата задача. Треба да се истакне дека, оптималното решение на реален проблем (каде спаѓа планирањето со ВСС), е компромис меѓу: управувачките критериуми и ограничувањата на системот. Затоа планерот, оптималното решение добиено со математичкото моделирање, треба да го третира како индикативна, а не како апсолутна категорија. Критериумот најчесто се изразува со критериумски функционал (функција од подфункции), кој за оптималното решение достигнува глобален екстрем. Од математички аспект, проблемот на оптимизацијата се сведува на:

- (а) определување на максимум (или минимум) на критериумскиот функционал, и
- (б) утврдување на вредностите на варијаблите, со кои се постигнува екстремот на критериумот.

Во втората половина на XX век, во математичката анализа, се развиени различни методи за одредени класи на проблеми, бидејќи не постои еден алгоритам кој би бил применлив за сите оптимизациони проблеми. Имајќи ја предвид „спротивноста на интересите“ како една од основните карактеристики на ВСС (каде практично сите корисници се наоѓаат во меѓусебна опоненција, барем по еден од повеќето можни аспекти), покрај оптимизацијата според еден критериум (скаларна), актуелна е и повеќе-критериумската оптимизација (векторска). Со примена на методите на векторската оптимизација се овозможува да се изнајде најповолно решение на ВСС со истовремена примена на повеќе критериуми. Бидејќи кај реалните системи не постои решение за еден векторски оптимизационен проблем, кое истовремено би ги екстремизирало сите критериумски функции, воведен е поимот на неинфериорно решение, или Парето оптимално.

Оптимизацијата на ВСС подразбира решавање на повеќе групи на задачи, од кои, при планирањето на ВСС, најзначајни се следниве три задачи:

- (1) Оптимален степен на водостопански развој, или задача на оптимална **конфигурација** на ВСС;
- (2) Определување на оптимални параметри на ВСС, или задача на оптимална **синтеза**;
- (3) Определување на оптимално користење со ВСС, или задача на оптимална **анализа**.

Клучната поставка на водостопанското планирање е дека овие три групи на оптимизациони задачи се меѓусебно спрегнати, што условува истовремено (паралелно) да се решаваат. Така, при решавањето на задачата на оптимална синтеза (каде критериум е максимизација на нето добивки), за секоја варијантата на ВСС со претпоставени параметри (од што произлегуваат трошоците), треба да се реши задачата на оптимална анализа (од што произлегуваат добивките). Понатаму, при изборот на оптималниот степен на водостопански развој, при рангирањето на варијантите на ВСС со различни конфигурации (каде најчесто се користи повеќе-критериумска оптимизација), за секоја претпоставена варијантна конфигурација, треба да се реши задачата на оптимална синтеза.

За жал, во нашата водостопанска практика, покрај зачестената експлоатација на терминот „Оптимално решение на ВСС“, голем број планери забораваат на фактот дека, доколку во планирањето на ВСС не се почитува одредбата на спрегнатост и паралелност на овие три задачи, тогаш се урива целиот концепт на оптимизација на системот. Како примери за оваа констатација може да послужат бројни проектни програми за сложени ВСС во Македонија, каде во завршната фаза на хидротехничкиот проект, откако се усвоени параметрите на системот и се димензионирани хидротехничките објекти (има случаи дури и да бидат изградени!?), се бара да се утврди оптималниот режим на користење со системот. Ова упатува на заклучокот дека, во почетната фаза на планирањето, не била решена задачата на оптимална анализа и дека параметрите на системот биле усвоени за некое импровизирано управување, кое најверојатно се разликува од оптималното, и како такви не може да бидат оптимални параметри на ВСС.

1.6.1. Оптимална анализа на ВСС

Задачата на оптимална анализа се формулира на следниов начин: познати се конфигурацијата и параметрите на ВСС и за познат влез (хидролошко оптоварување), потребно е да се определи оптималното управување со системот. Под оптимално управување се подразбира - управување од множеството на дозволените управувања, со кое се екстремизира целната функција на задачата на оптимална анализа. Целната функција на задачата на анализа има сепарабилен карактер (по однос на временските интервали во кои се донесува управувачка одлука), и претставува кумулативна сума во експлоатациониот период на системот. Ваквите целни функции може да бидат дефинирани на следниов начин:

- (а) подмирување на нормалните потреби на примарните водокорисници (водоснабдување и/или наводнување) со степен на обезбеденост поголем од потребниот (прифатен во проектот),
- (б) максимизација на енергетската ефективност (како сума од добивките од произведената снага и енергија од ХЕЦ),
- (в) резултантна целна функција, како комбинација од претходните две, и сл.

Независно од обемот на пресметките содржани во оптимизационите задачи со ВСС (анализа, синтеза, конфигурација), решавањето на задачата на оптимална анализа, од аналитички аспект, е убедливо најсложената управувачка задача.

Ако во задачата на анализа се користат: (а) регистрирана историска низа на дотекувањата, и (б) хронолошки низи за потребите, тогаш се работи за **детерминистичка** задача на анализа. Резултат на детерминистичката анализа на системот е една вредност за ефективноста од користењето на ВСС во експлоатациониот период. Овде треба да се подвлече дека влезните хидрометеоролошки серии треба да бидат репрезентативни и со доволна должина (во која ќе биде опфатен феноменот на натрупување на сушни и водни години). Репрезентативноста на влезните серии - односно, дали елементите од узоракот или пробата потекнуваат од иста популација - се потврдува со софистицирани анализи од параметарска и стохастичка хидрологија. Низите за потребната потрошувачка (наводнување, водоснабдување, биолошки минимум, итн.) се однесуваат за истиот временски период (како и низата на измерените дотекувања), и се генерирани од регистрираните серии за хидрометеоролошки податоци.

Доколку “N” пати се решава задачата на анализа, со користење на “N” синтетички сценарија за влезните серии (дотекувања и потребна потрошувачка), тогаш се работи за **стохастичка** задача на анализа, со имплицитен пристап. Овие “N” синтетички сценарија потекнуваат од иста серија на историски податоци и имаат рамноправна веројатност дека ќе се случат во иднината. Вештачките серии за хидролошкиот влез и кореспондентните низи на потребната потрошувачка се генерираат (симулираат) со надворешен естиматор, на пример, со користење на модифициран метод на фрагменти за симулирање на месечни протекувања развиен од В. Djordjević во 1973 година. Резултат од стохастичката анализа е множество на вредности за ефективноста од користењето на системот, и со нивна пробабилистичка анализа и интерпретација, се добива кумулативната

веројатност за ефективност на ВСС во експлоатациониот период. Со ваквиот имплицитен стохастички пристап, за решавање на задачата на анализа, се добива многу подоверлива информација за одговорот на системот во експлоатација, споредено со детерминистичкиот пристап.

Според досегашните истражувања, за решавање на задачата на оптимална анализа со ВСС (каде целната функција најчесто има нелинеарен облик), најприменувана и нумерички најоперативна метода (развиена во областа на операционите истражувања), е динамичкото програмирање (ДП), Dynamic Programming, пронајдено и развиено од американскиот математичар R. Bellman во 1957-та година. ДП, како математичка метода, претставува оптимизационен апарат, кој овозможува определување на оптимално решение кај повеќестепен (етапен) процес на одлучување, каде во секоја етапа може да се донеси одлука и да се спроведи соодветна акција. Со истражувањето на апликациите на ДП во областа на водните ресурси, се наметнува констатацијата дека проблемите од управувањето со ВСС служат како одличен потстрек или подвижна сила и лабораторија за развој на динамичкото програмирање како математичка метода. Употребата на ДП не е стандардна, односно за решавање на оптимизационата задача неопходно е потполно познавање на:

- (1) суштината на анализираната задача (за да се формализираат аналитички: трансформацијата на состојбите, ограничувањата на состојбите и управувањата, и критериумскиот функционал) и
- (2) апаратот на ДП (за да се изведат во математички облик низите на рекурентни равенки, со користење на принципот на оптималност).

Затоа, секоја оптимизациона задача која се решава со методот на ДП, претставува посебен проблем кој се решава со посебен математички модел и соодветно софтверско решение, за чие изготвување е неопходна креативност и одредена аналитичка и програмерска подготвеност и вештина на истражувачот.

За совладување на нумеричката гломазност на ДП се применува методот на диференцијално (или инкрементално) динамичко програмирање, развиен од Bernholtz и Graham во 1960-та година, а за првпат применет кај водните ресурси од W.Hall во 1969-та година. Овај метод претставува нумеричка декомпозиција на оптимизационата задача која се решава со ДП и се состои од: (1) редуцирање на димензионалноста на оптимизационата задача, и (2) намалување на потребното време за егзекуција на програмот. За оптимално управување со повеќенаменски ВСС, за решавање на задачата на повеќе-критериумско управување, развиен е методот на динамичко компромисно програмирање од S. Opricović во 1979-та година.

1.6.2. Оптимална синтеза на ВСС

Задачата на оптимална синтеза се формулира на следниов начин: се бараат оптималните параметри на системот, кои при оптимално користење на ВСС, ја екстремизираат целната функција на задачата на оптимална синтеза. Од самата формулација на задачата на синтеза, очигледно е дека во нејзиното решавање, мора да биде инкорпорирано решавањето на задачата на оптимална анализа -која го дава одговорот за оптимално користење на системот во експлоатацијата. Целната функција на задачата на синтеза, најчесто се сведува на економски

критериум, на пример максимизација на нето добивки. Резултат на оптималната синтеза е усвојувањето на физичките параметри на ВСС: големина на акумулација, инсталираност на ХЕЦ, големина на површина за наводнување, капацитет на индустриски погон или населено место за водоснабдување, и слично. Независно од обемот на техничко-економските пресметки, содржани во задачата на синтеза, од аналитички аспект, решавањето на оптималната синтеза е едноставна управувачка задача, која се извршува со примена на метод на пребарување.

Зависно кој концепт е применет при решавање на задачата на анализа (детерминистички или стохастички), се разликува детерминистичка или стохастичка задача на оптимална синтеза. Поради огромниот обем на пресметувања, во инженерската практика најчесто се користи детерминистичка задача на оптимална синтеза. Вообичаено е, откако ќе се усвојат оптималните параметри на ВСС, само за оптималната варијанта на системот, да се спроведе стохастичката задача на оптимална анализа. Доколку се примени стохастичка задача на оптимална синтеза, тогаш енорно се зголемува обемот на пресметките и се усложнува целната функција на задачата на синтеза. Така, да разгледаме пример каде со задачата на оптимална синтеза треба да се определи оптималната вредност само на еден параметар на ВСС, за кој се идентификувани “К” дискретни вредности. Со детерминистичкиот концепт, задачата на оптимална анализа треба да се реши К - пати, со што ќе се добијат К - вредности за добивките на системот. Овие К - скалари се влез во задачата на оптимална синтеза, каде целната функција е едноставна, и се состои во определување на екстрем од “К” - детерминистички големини. Со стохастичкиот пристап, задачата на оптимална анализа треба да се реши $K \cdot N$ - пати, (каде “N” е број на синтетички сценарија за влезните серии за анализа на системот), со што ќе се добијат “К” вредности со веројатностни криви за добивките на системот. Овие “К”- веројатностни функции ќе бидат влез во задачата на оптимална синтеза, каде целната функција ќе се усложни во определување на најповолно решение како баланс помеѓу: екстрем на максимална веројатност, минимална чувствителност (или најмали отстапувања од вредноста со максимална веројатност), и сл. Овде би требало да се напomenи дека доколку задачата на синтеза извршува за “m” параметри, со соодветни идентификувани дискретни вредности $\{K_i, i = 1, m\}$, тогаш бројот на варијантите при решавање на задачата на оптимална синтеза нараснува на: $K = K_1 * K_2 * \dots * K_m$, што најеклатантно покажува на комплексноста на концептот - имплицитен стохастички проблем на оптимална синтеза.

1.6.3. Оптимален степен на водостопански развој

Определувањето на оптимален степен на водостопански развој се однесува на: (1) можно задоволување на искажаните водостопански потреби и (2) можности за опфаќање на потенцијалните корисници со системот. Во рамките на оваа задача се решаваат следните проблеми:

- (а) ниво на развој на ВСС, како интегрален или парцијален систем, во функција од нивото на материјален, демографски и урбан развој на регионот;
- (б) избор на најповолна фазност во развојот на ВСС;

(в) разрешување на спротивставеноста на интересите на одделни корисници на водниот потенцијал;

(г) идентификување и на можни варијантни конфигурации на ВСС и избор на најповолна конфигурација.

Задачата на избор на оптимална конфигурација на ВСС се решава со концептот на векторска оптимизација, или повеќе-критериумско рангирање. Суштината на овој метод се состои во следново: со рангирањето на претходно оптимизирани варијанти (со решавање на задачата на оптимална синтеза за секоја варијантна конфигурација), се ограничува просторот на одлучувањето на доносителот на одлуката. Досега се развиени повеќе методи за повеќе-критериумско рангирање (Utility Theory, PROMETHEE, ELECTRE, IKOR, итн.), а единствените услови кои треба да бидат исполнети при рангирањето се: (1) сите варијанти да бидат на потполно исто ниво на изученост на ефективност (односно да бидат истражени со исто ниво на деталација), и (2) сите варијанти да бидат вреднувани по сите усвоени критериуми.

1.7. Субоптимизација на водостопанските системи

Според досегашното искуство од оптимизацијата на ВСС, потребно е да се истакне дека планирањето на ВСС спаѓа во класата на тешко (лошо) структурирани задачи. Основните особини на овој вид управувачки задачи се:

- (1) физичките процеси не се потполно објаснети со соодветни законитости;
- (2) целите не се јасно дефинирани, односно не постои еднозначна целна функција; и
- (3) системот е стохастички поради постоењето на: природни, економски, општествени и институционални неизвесности.

Имајќи ги предвид наведените особини, очигледно е дека, решението на оптимизациониот проблем со ВСС не е можно без одредени хеуристички одлучувања на планерот (базирани на бројни претпоставки, искуство и интуиција), во тек изработката на поставената задача.

Решавањето на тешко структурирани управувачки задачи треба да се третира како процес на постапно осознавање на проблемот и подобрување на решението. Ваквиот „мек“ и флексибилен концепт, кој е неопходен да се добие издржано решение за сложените ВСС, сериозно отстапува од „тврдата“ и крута математичка форма - оптимизација, па затоа најприкладно е да се нарекува - субоптимизација. Со оваа термилошка дистинкција, поимот оптимизација, базиран на строги нормативни методи за изнаоѓање на оптимум при зададени ограничувања, би егзистирал во идеалниот свет на математиката, а поимот субоптимизација се задржува во реалниот инженерски свет каде се добиваат решенија за сложените ВСС. Треба да се подвлече дека, без разлика колку поимот „Оптимизација на ВСС“ се вгнездил во водостопанската терминологија, од математички аспект, за планерите на ВСС треба да биде потполно извесно дека станува збор за субоптимизација. Имено, за субоптимизацијата може да се дискутира дали е добра или лоша, што би било бесмислено за оптимизацијата! Понатаму, „добра“ субоптимизација е онаа што креира динамички адаптивен

систем, со конфигурација и параметри, кои овозможуваат непречен развој на системот, во согласност со збогатените сознанија за ВСС.

Во прилог на поимот субоптимизација се и најновите методи за решавање на водостопанските управувачки задачи, кои почнале да се развиваат во последната декада од XX век, базирани на современите информациони техники. Овие алатки од State of the Art⁶ на информационата технологија, својот развој го достигнуваат во областите каде досега човекот бил супериорен во однос на компјутерот, во однос на способноста за приближно размислување и усовршување со учење. Способноста за апроксимативно размислување и внесување на човековата интуиција во софтверот за планирање на ВСС во услови на неодреденост и непрецизност, е овозможена со примената на „Теоријата на фази множества“ - Theory of Fuzzy Sets, прв пат воведени во САД, од L.A. Zadeh во 1965 година, ([Đorđević B., 1994.](#)). Способноста за учење и усовршување на софтверот за водостопанските планирање е можна со развојот на „Вештачки невронски мрежи“ - Artificial Neural Network, ([Zdravkova K., Petkovski L., 1999.](#)). Вештачката невронска мрежа може да се опише како флексибилна математичка структура способна да ги идентификува комплексните нелинеарни врски меѓу влезните и излезните множества во системот. Ваквите математички форми, иако сè уште се во фаза на развој и усовршување (во почетокот на XXI век), се покажале исклучително употребливи и ефикасни кај лошо структурираните проблеми поврзани со ВСС, односно кај системи со карактеристики на управувачкиот процес - премногу сложени за да се опишат со физички закони и математички да се формализираат. Овие најнови алатки во развојот на информационите системи за управување со ВСС се посебно корисни во кодирањето на оптималните правила кај комбинираниот или симулационо-оптимизациониот модел за управување со системот ([Petkovski L., 1998.](#), [Petkovski L., Tančev L., 1998.](#)) .

1.8. Оптимизационо-симулационен метод за анализа на водостопанските системи

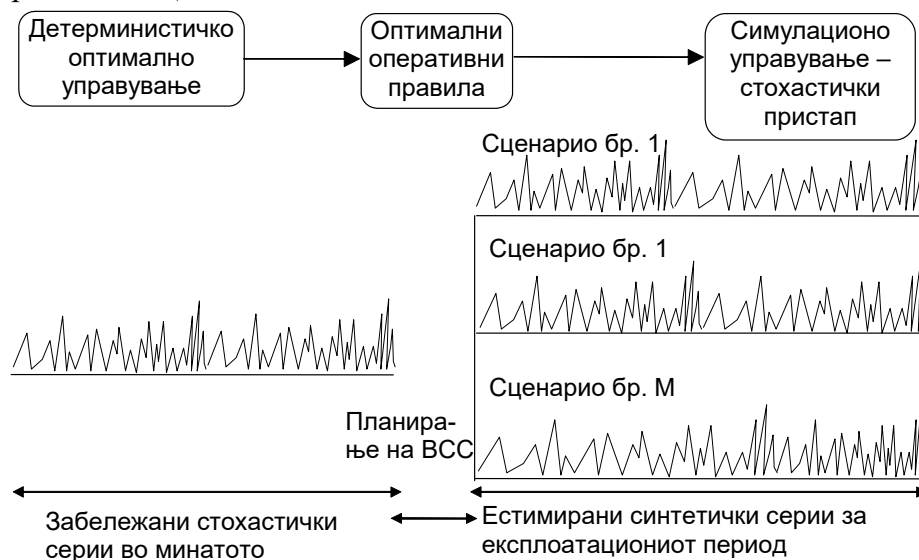
Решавањето на задачата на анализа со ВСС, со примена на апаратот на динамичкото програмирање, или со било кој друг оптимизационен метод на операционите истражувања, подразбира комплетно познавање на влезните големини во периодот на управувањето. Влезните серии (дотекувања, потреби за наводнување, и сл.), во задачата на анализа имаат стохастички карактер, и нереално е да се претпостави дека може да биде познат нивниот распоред во експлоатациониот период на ВСС. Затоа, оправдана е констатацијата дека оптималното управување со ВСС е имагинарно, или базирано на нереалната претпоставка за комплетно познавање на хидролошкото оптоварување на системот, па во натамошниот текст ќе биде означено како идеално управување. Во реалноста со ВСС се управува чекор по чекор, или управувачките одлуки се донесуваат на секвенционален начин - зависно од моментната состојба (исполнетост во акумулацијата), и прогнозите за дотекувањето и потребите во тековниот временски период, според усвоена оперативна политика. Така, за

⁶ Највисоко ниво на развој во сегашноста

решавање на задачата на анализа со ВСС, се издвојуваат следниве две методи: (а) оптимизационен (идеален) и (б) симулационен (реален).

Слабост на оптималното (или идеалното) управување е нереалната претпоставка за комплетно познавање на влезните серии во периодот на управувањето. Слабост на симулационото (или реалното) управување е дека се реализира според субјективната процена на планерот за оперативната политика со ВСС, а не се потпира на математички нормативен метод кој директно го детерминира најповолното управување. Наведените недостатоци на оптималниот и симулациониот метод за решавање на задачата на анализа со ВСС, ги поттикнале истражувачите во полето на науката за водостопанските системи кон развој и усовршување на комбиниран метод, каде ќе се искористат позитивните и ќе се ублажат негативните страни на овие два пристапи.

Потребата од комбиниран или оптимизационо-симулационен математички модел за управување со ВСС (слика 1.8) се наметнува од следната размисла. При решавањето на проблемот на оптимална синтеза, односно при определувањето на параметрите кои ја екстремизираат целната функција на задачата на оптимална синтеза, постои изразена методолошка недоследност. На пример, нека параметар на системот, чија големина треба да се определи, е инсталираното протекување на ХЕЦ. Во таков случај, логично би било, критериумот на оптимална синтеза да биде економски, односно максимизација на годишните нето добивки - со претпоставка дека конзумот е доволно голем да го прими целокупното производство на снага и електрична енергија од анализираната ХЕЦ.



Сл. 1.8. Концепт за оптимизационо-симулационен математички модел за планирање на ВСС со имплицитен стохастички пристап

Од една страна, за различни инсталираности, може доста прецизно да се пресметаат годишните трошоци, а од друга, со користење на методи на оперативни истражувања (динамичко програмирање), може да се определи оптималното управување со системот, со задоволување на критериумот на оптималната анализа, максимизација на производство на снага и енергија.

Меѓутоа, треба да се има предвид, дека моќниот нумерички оптимизационен апарат на динамичко програмирање може да се употреби само доколку е зададена реализацијата на основната влезна големина, векторот на дотекувањата, однапред во текот на експлоатацијата, што е сосема невозможно. Дури и со користење на имплицитен стохастички пристап, со “N” генерирани синтетички низи, и со пробабилистичка интерпретација на резултатите, се добива само веројатноста за постигнување на одредено производство на електрична енергија, доколку со системот “N” пати оптимално се управува. Тоа значи дека биле расположливи “N” сценарија со комплетна информација за реализираните дотекувања во анализираниот период, што само по себе е апсурд, па затоа претставува незнатна практична помош на планерот на системот во реалното управување со системот.

Методолошката недоследност на ваквиот пристап произлегува од нескладноста меѓу резултатите со кои се прави споредба и се врши избор на оптималните параметри. Од една страна располагаме со реални годишни трошоци, а од друга, со имагинарни годишни добивки, а потребно е да се дефинираат нето добивките - како разлика меѓу добивките и трошоците. Добивките се имагинарни, зашто се добиваат со оптимално управување, што подразбира целосно позната реализација на дотекувањата во експлоатација, што е нереален услов. Последици од ваквото планирање се:

- (1) поддимензионирани ВСС во доменот на доверливоста на функционирањето, односно ВСС кои во фаза на експлоатација не ги даваат очекуваните ефекти, проценети во фаза на планирање, и
- (2) неоправдан оптимизам при процена на можностите на постојните ВСС, што води кон поставување на цели кои системот не може да ги исполни.

Реалните годишни добивки од системот може да се добијат само доколку се конструира симулационен математички модел - кој го поддржува реалното управување со системот, што подразбира секвенционално донесување на одлука, или чекор по чекор по однос на временската координата. Овде се наметнува клучното прашање - како да се унапреди симулационото управување со ВСС, а да не се отстапи од секвенционалниот карактер на управувањето. Усовршување на симулационото управување е изводливо доколку во оперативната политика на симулациониот модел се инкорпорираат оптималните оперативни правила. Овие правила произлегуваат од детерминистичкото оптимално управување (определено со историските низи на влезни податоци), што претставува единствено управувачко искуство со системот во фаза на планирање. Мерка за квалитет на секвенционалниот математички модел би бил степенот на достигнувањето на ефикасноста од оптималното управување. Со усовршувањето на наведениот реален модел, квалитетот на управувањето може само асимптотски да се доближува до квалитетот на фиктивниот, имагинарниот модел базиран на математичкото програмирање. Зависно од математичката основа на симулациониот модел се разликуваат: регресионен контролер (базиран на повеќекратна корелација или конвенционална двовалентна логика), и фази контролер (базиран на теорија на фази множества или поливалентна логика).

Прв пат Young во 1967-та година предложил генерални правила за оперативно управување со ВСС со акумулација, со користење на резултатите од детерминистички оптимизационен модел. Тој сугерирал регресионо изведување на симулационото управување (со метод на најмали квадрати), со користење на карактеристиките од оптималното управување: претходни сезонски излези, дотекувања и исполнетост. На тој начин, нешто од стохастичката природа на оптималното управување би се опфатило во генералните правила за оперативното управување. Подоцна следат голем број на автори кои се бават со рафинирање на симулационите модели, со зголемување на корелацијата меѓу оперативното и оптималното управување. Треба да се истакнат истражувањата на Bhaskar и Whitlach од 1980-та година, кои тестирале голем број на комплексни и нелинеарни форми за генерални правила за оперативно управување и дошле до заклучок дека со линеарната форма на симулациониот модел се добиваат исто така добри (или подобри за многу случаи), реални управувања споредени со нелинеарните сложени корелациони модели.

2. Специфични модели во оптимизацијата на хидросистемите

2.1. Критериум на управување при оптимизација на ВСС

Целта при управувањето со ВСС во експлоатација е да се максимизираат добивките кои зависат од состојбите и управувањата со системот. Доколку се разгледува вообичаен ВСС наменет за водоснабдување, еколошки гарантирано протекување, наводнување и енергетика, (каде потребите за наводнувањето се повеќекратно поголеми од другите приоритетни водокорисници), тогаш ефикасноста на управувањето би се контролирала преку добивките од наводнувањето и од производството на електрична енергија, со претпоставка дека за дополнителните мерливи корисници потребите се потполно задоволени. Критериум за оптимизација (доколку се решава задача на оптимална анализа или се споредуваат ефикасностите од управувањето со симулационен модел), би бил максимизација на пондерисано производство на ЕЕ при исполнети услови за задоволување на наводнувањето (според временската и количинската обезбеденост), и потполно подмирување на приоритетните водокорисници (внесени преку ограничувањата на управувањата, со што се исклучени од оптимизациониот процес). Во аналитички облик, критериумскиот функционал се сведува на максимизација на резултантната сепарабилна функција:

$$J: \max_{\{y_i, V\}} \sum_{i=1}^N (Dn_i + De_i) \quad (2.1)$$

При подмирувањето на потребите за наводнувањето потребно е да бидат задоволени два услови:

- (1) временска обезбеденост при задоволување на нормалните потреби, и
- (2) количинска обезбеденост, за да се елиминира преголема „длабочина на пробивање“ во оние временски интервали кога не се задоволени нормалните потреби.

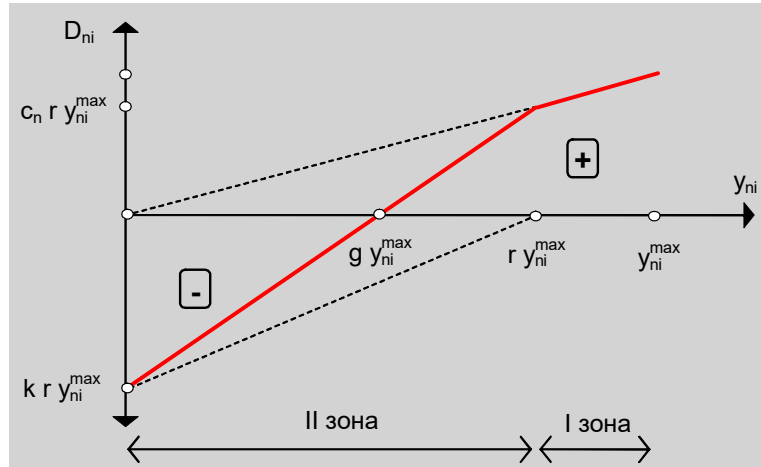
Затоа при определувањето на добивките од наводнувањето, покрај нормалните (максимални) потреби за наводнување (кои треба да бидат подмирени со бараната обезбеденост 80% или 85%), се воведуваат: редуцирани потреби (кои треба да бидат подмирени со повисока обезбеденост 90% или 95%) и гранични потреби за наводнување (кои треба да бидат подмирени со максимална обезбеденост 98% или 99%).

Добивките (или штетите) од испораката на вода за наводнување (зависно дали тие количини y_{ni} се поголеми или помали од граничните потреби за наводнување $g \cdot y_{ni}^{\max}$), се усвоени според [слика 2.1](#).

Од дијаграмот ([слика 2.1](#)) може да се забележат две зони по однос на „активирањето“ на казнената функција (зависно дали количината испорачана за наводнување y_{ni} е поголема или помала од редуцираните потреби $r \cdot y_{ni}^{\max}$). Функцијата на добивките од наводнувањето D_{ni} може да се формализира со следните релации:

$$\begin{aligned}
y_{ni} &= (y_i - I_i) - y_{zi} \\
D_{ni} &= \begin{cases} c_n y_{ni} & \Leftarrow r \cdot y_{ni}^{\max} \leq y_{ni} \leq y_{ni}^{\max} \\ c_n y_{ni} - k(r \cdot y_{ni}^{\max} - y_{ni}) & \Leftarrow 0.0 \leq y_{ni} < r \cdot y_{ni}^{\max} \end{cases} \quad (2.2.1) \\
\frac{c_n r \cdot y_{ni}^{\max}}{(r - g) y_{ni}^{\max}} &= \frac{k \cdot r \cdot y_{ni}^{\max}}{g \cdot y_{ni}^{\max}} \Rightarrow k = \frac{c_n \cdot g}{r - g}
\end{aligned}$$

Каде што: c_n е единечна цена за наводнување, $g = 0.5 \div 0.7$ е бездимензионален коефициент на граничните потреби (кои ако не се задоволени се јавуваат штети), $r = 0.8 \div 0.9$ е бездимензионален коефициент на редуцираните потреби (кои се толерираат), и " k " е единечна „казна“, која се добива од сличност на триаголниците од [слика 2.1](#), и која се „активира“ доколку не се задоволени граничните потреби. При изборот на коефициентите " g " и " r " влијание има карактерот на приоритетниот водокорисник и избраниот математички метод за управување со ВСС.



Сл. 2.1. Дијаграм на добивки (штети) при подмирување на потребите за наводнување

Добивките од енергетското производство D_{ei} се изразуваат со нелинеарна функција, бидејќи зависат од производот на координатите на состојбите V_i и координатите на управувањата y_i со системот. Доколку е прифатлива апроксимацијата за константна вредност на η - ккд на праг на ХЕЦ, тогаш енергетското производство E_i и добивките D_{ei} , во i -тиот временски интервал, се пресметуваат според следниве релации:

$$\begin{aligned}
y_{ei} &= y_i - y_{pi} \\
Z_{i-1} &= Z(V_{i-1}); \quad Z_i = Z(V_i); \quad \bar{Z}_i = \frac{Z_{i-1} + Z_i}{2}; \\
\bar{H}_i &= \bar{Z}_i - K_{DV} - dh; \quad P_i = \eta \gamma \bar{H}_i Q_{ins} \\
t_i &= \frac{y_{ei}}{Q_{ins}}; \quad E_i = P_i t_i; \quad D_{ei} = c_{ei} E_i
\end{aligned} \quad (2.2.2)$$

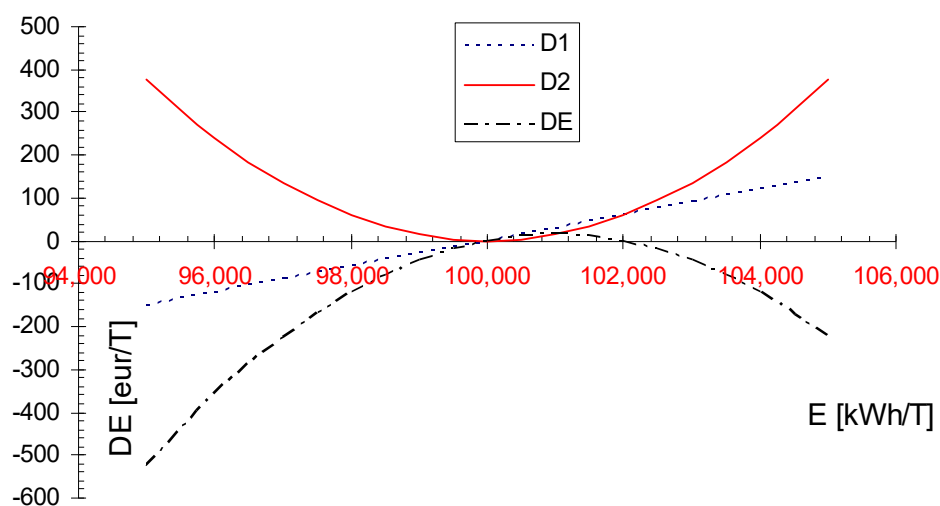
При определување на добивките од производството на електрична енергија (ЕЕ) D_{ei} усвоена е претпоставка дека конзумот ќе го прими E_i целото производство на ЕЕ со цена c_{ei} во i -тиот месец. Оваа апроксимација е оправдана поради следните фактори: (а) хидроенергијата е еколошки најчиста и обновлива,

па затоа треба во потполност да се користи и (б) производството на ЕЕ од нова хидроцентрала (ХЕЦ) во развиен мешовит електро-енергетски систем (ЕЕС) е мало во споредба со потребите на конзумот.

Ако производството на ЕЕ на анализираната ХЕЦ треба да се прилагоди на однапред зададен дијаграм на месечно оптоварување на ЕЕС (според енергетските потреби на конзумот), тогаш добивките од производство на ЕЕ може да се апроксимираат со релацијата, **слика 2.2**:

$$D_{ei} = D_{1i} - D_{2i} = c_{ei} (E_i - B_i) - w c_{ei} (E_i - B_i)^2 \quad (2.3)$$

каде што: B_i е бараното производство на ЕЕ, а “ w ” е позитивен тежински бездимензионален коефициент. Во вака избраната функција, со првиот член се максимизира производството на ЕЕ, а преку вториот член се прави минимизирање на отстапувањето од поставеното барање.



Сл. 2.2. Геометриска интерпретација на функцијата на добивки DE за прилагодување на управувањето на однапред зададен дијаграм на оптоварување (за барано производство од $B = 100,000$ kWh/T; $c_e = 0.03$, и коефициент $w = 0.0005$)

2.2. Модул за хидроенергетско производство

Во водостопанската анализа на повеќенаменски водостопански систем со акумулација, неопходни се модули за пресметка на ефективност на одделните водокорисници зависно од состојбите и управувањата со системот. Овие модули генерално може да се систематизираат во три групи:

- за заштита од поплави на низводно хидролошки загрошено подрачје, според дозволените максимално протекување и прирастите во протекувањето;
- за задоволување на потребите на одделни водокорисници рангирани по приоритет - еколошки гарантирано протекување, водоснабдување на население, наводнување, снабдување со технолошка вода на индустрија, (според веројатносна и количинска обезбеденост), и
- за максимизирање на добивки од енергетското производство.

Независно дали е применет симулационен или оптимизационен пристап во решавањето на управувачката задача, од нумерички аспект, убедливо најсложен е проблемот за определување на енергетското производство на системот.

Во натамошниот текст е презентирано изготвувањето на модулот за хидроенергетско производство, кој може да се примени во водостопанските анализи во фаза на планирање на водостопанските системи со акумулациона ХЕЦ. Ако се применат следниве ознаки: DT [sec] е времетраење на разгледуваниот интервал, V [m^3] и V^P [m^3] се волумени во корисниот простор на крајот и почетокот од разгледуваниот интервал, X [m^3/s] и Y [m^3/s] се дотекување и излез од акумулацијата, тогаш билансната равенка на акумулацијата е:

$$V = V^P + X \cdot DT - Y \cdot DT \quad (2.4)$$

каде сумарниот излез од акумулацијата е еднаков на:

$$Y = Y^I + Y^F + Y^E + Y^P \quad (2.5)$$

каде што: Y^I е испарување, Y^F е филтрација, Y^E е протекување низ ХЕЦ, Y^P е енергетски неискористено преливање. Хидроцентралите во водостопанската анализа во фаза на планирање, без разлика на бројот на турбо-генераторските блокови, најчесто се апроксимираат во единствени блокови со: (1) инсталирано протекување на ХЕЦ или капацитет на довод Q_{INS} [m^3/s], и (2) суперпониран дијаграм за ккд на опремата $\eta = \eta(H_n, Q)$. Сложената хидроенергетската анализа може да се разложи во три чекори.

Првиот чекор во хидроенергетската анализа се состои во: (1) определување на оптималните димензии на објектите на доводната и одводната деривација - од условот за минимизација на сумата од: експлоатационите трошоци за разгледуваниот објект и годишната загуба на снага и енергија во електроенергетскиот систем, (2) дефинирање на хидрауличките зависимости на објектите со усвоена геометрија - консумпциона крива на одводна вада (долна вода), $h = h(Y^E + Y^P)$, и загуба на притисок низ доводот $dh = h(Y^E)$, зависно од протекувањето низ доводниот орган од ХЕЦ, и (3) утврдување на инсталирана снага на опремата на праг на ХЕЦ P_{INS} [kW], со ползување на следната равенка:

$$P_{INS} = 9.81 \eta_{nom} H_{nom} Q_{ins} \quad (2.6)$$

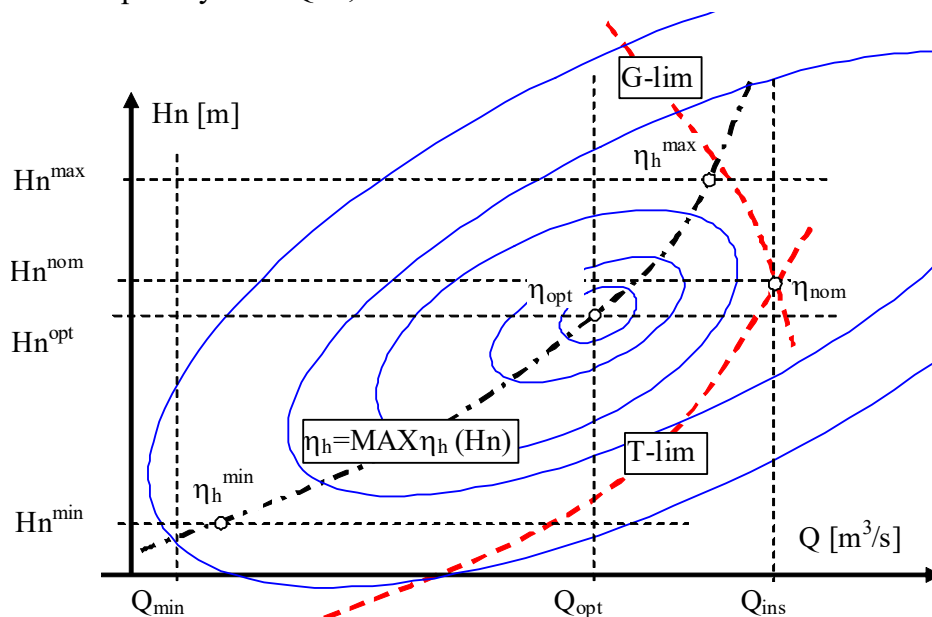
H_{nom} е номинален нето пад - разлика меѓу номиналното ниво на горна вода Z_R^{nom} и кота на дно на одводна вада K_{ov} , намалена за загубата на притисок низ доводниот орган и водната височина во одводната вада, кога низ ХЕЦ минува инсталираното протекување Q_{ins} . Изборот на H_{nom} е значајна проектантска одлука која треба да се потврди со соодветни енергетско економски анализи. Така, за избрано Q_{ins} , треба да се предвидат неколку вредности за H_{nom} (кои може да бидат помали и/или поголеми од H_{opt}). Со пораст на H_{nom} секако дека се зголемуваат трошоците за опремата (се зголемува P_{INS}), но растат и добивките поради поголемата енергетска ефективност на ХЕЦ. Имено, со пораст на H_{nom} се подобрува маневарскиот простор на опремата, и се создаваат услови за поголемо производство на електрична енергија и поголема гарантирана снага.

η_{nom} е номинален ккд на опремата - интерполиран ккд за номинален нето пад и инсталирано протекување $\eta_{nom} = \eta(H_{nom}, Q_{ins})$.

Вториот чекор во хидроенергетската анализа е прецизното дефинирање на карактеристичните вредности за: (1) протекувањата, (2) нето-падовите, и (3)

коэффициентите на корисно дејство (ккд) на опремата; релевантни за пресметка на енергетската ефективност.

Покрај инсталираното (номинално или максимално) протекување Q_{ins} , потребно е да се усвојат вредностите на оптималното протекување Q_{opt} и минималното протекување Q_{min} , [слика 2.3](#).



Сл. 2.3. Суперпонирана топографска карактеристика на опремата $\eta = \eta(H_n, Q)$

Оптимално протекување е протекувањето за кое при оптимален нето пад H_{opt} се постигнува оптимален ккд на опремата η_{opt} . Во фаза на планирање, доколку не се располага со попрецизни податоци, се проценува $Q_{opt} = (86 \div 88)\% Q_{ins}$ (за Франсисова турбина) и $Q_{opt} = 80\% Q_{ins}$ (за Капланова турбина). Минималното протекување низ ХЕЦ е минималното протекување низ еден турбо-генераторски блок при кое започнува производството на електрична енергија, кое е нешто поголемо од протекувањето при „празен од“ на турбината, и кое може да се претпостави на $Q_{min} = 30\% Q_{ins}$ (за Франсисова турбина), и $Q_{min} = 15\% Q_{ins}$ (за Капланова турбина).

Минимален нето пад H_{min} е разлика меѓу минимално работно ниво на горна вода Z_R^{min} и кота на дно на одводна вада K_{ov} , намалена за загубата на притисок низ доводниот орган и водната височина во одводната вада, кога низ ХЕЦ минува максималното протекување Q_{max} . Оптималниот нето пад H_{opt} е разлика меѓу оптимално ниво на горна вода Z_R^{opt} и кота на дно на одводна вада K_{ov} , намалена за загубата на притисок низ доводниот орган и водната височина во одводната вада, кога низ ХЕЦ минува оптималното протекување Q_{opt} . Во фазата на планирање на хидросистемот, оптималната кота на горна вода (ниво со максимална фреквенција во експлоатација), се претпоставува во тежиштето на корисниот волумен. Максимален нето пад H_{max} е разлика меѓу максимално работно ниво на горна вода Z_R^{max} и кота на дно на одводна вада K_{ov} , намалена за загубата на притисок низ доводниот орган и водната височина во одводната вада, кога низ ХЕЦ минува минималното протекување Q_{min} .

Во натамошниот текст, под коефициент на корисно дејство (ккд) на опремата $\eta = \eta_T \cdot \eta_G \cdot \eta_{TR}$ се подразбира производ на ккд на турбина η_T со ккд на генератор η_G и ккд на трансформатор η_{TR} , односно произведената енергија се однесува на праг на трансформатор од ХЕЦ. Современата електро-машинска опрема се карактеризира со високи вредности на ккд, така што при планирањето за средни и големи агрегати, може да се усвојат високи и константни вредности за $\eta_G = 0.97$ и $\eta_{TR} = 0.99$, додека ккд на турбина $\eta_T = \eta_T(H_n, Q)$ зависи од нето падот и протекувањето, и е различен за различни видови турбини. Врз база на суперпонираниот дијаграм за ккд на опремата (за турбините), ккд може да се определи со апроксимација за линиски зависности:

- (1) зависноста - максимален ккд на опремата во функција од нето падот (независно од протекувањата), $\eta_h = \text{MAX} \eta_h(H_n)$, и
- (2) ккд на опремата зависно од протекувањата (за протекувања поголеми од Q_{OPT}), односно $\eta_Q = \eta(H_{ном}, Q)$.

Третиот чекор во хидроенергетската анализа е определување на енергетското производство на ХЕЦ. Енергетското производство за усвоената временска рамка со DT [sec] е во зависност од координатите на управувања $U=V^P$ [m³] и состојби на акумулацијата V [m³], и се добива со користење на следниот алгоритам:

- I Прво, се определува сумарниот излез од акумулацијата, изведен од [релациите 2.4 и 2.5](#):

$$Y = (U-V)/DT - Y^I + X \quad (2.7)$$

и евентуалното енергетско неискористено преливање Y_P доколку сумарниот излез $Y-Y^F$ е поголем од капацитетот на доводот на ХЕЦ Q_{INS} . Режимот на користење на енергетското протекување:

$$Y_E = (Y-Y^F) - Y^P \quad (2.8)$$

во рамките на чекорот од временската дискретизација во управувачката задача - во фаза на планирање - не може да биде познат! Енергетското користење Y_E за акумулациона ХЕЦ, дури и во најкусите временски рамки во управувачките задачи во фаза на планирање - на пример од еден час, по минути во тек на еден час (определување на број на вклучени турбини и нивна ангажираност), е проблем на оперативно управување во реално време. Затоа, во управувачката задача во фаза на планирање неопходно е да се креира модел со кој се апроксимира реалното производство на електрична енергија со користење на осреднети вредности за: (1) водна височина во одводната вада $h = h(Y-Y^F)$, зависно од сумарниот излез, и (2) загуба на притисок низ доводот $dh = h(Y_E)$, зависно од протекувањето низ доводот до ХЕЦ.

- II Второ, се пресметуваат котите на горна вода (со ползување на линијата на волумените на акумулацијата), на почетокот и на крајот од тековниот временски период: $K_U = Z(U)$ и $K_V = Z(V)$, и се определува осреднето ниво на горна вода:

$$K_{GV} = (K_U + K_V)/2 \quad (2.9)$$

Натаму се пресметуваат осреднетите вредности за:

(1) нето падот:

$$H_N = K_{GV} - d_h \cdot (K_{OV} + h) \quad (2.10)$$

и (2) ккд на опремата $\eta = \eta(H_N, Y_E)$, со што се инкорпорира влијанието на исполнетоста во акумулацијата и протекувањето врз работните карактеристики на опремата во хидроцентралата.

Пресметувањето на “ η ” се извршува во следните чекори. Во првиот чекор се пресметува максималниот ккд зависно од нето падот и независно од протекувањата $\eta_H = \eta_H(H_N)$. Потоа, ако е задоволен условот:

$$Y_E > Q_{OPT}(H_N/H_{nom})^{1/2} \quad (2.11)$$

тогаш се интерполира $\eta_Q = \eta_Q(Y_E)$ и зависно од H_N се корегира со η_H , односно $\eta = \eta(\eta_H, \eta_Q)$, во спротивно $\eta = \eta_H$.

III Трето, со осреднетото протекување $Q_E \leq Y_E$ се определува часовното производство на електрична енергија E_E , водејќи сметка за градежното, електричното и хидрауличкото ограничување, кои произлегуваат од:

(1) капацитетот на доводниот орган:

$$Q_E \leq Q_{INS} \quad (2.12)$$

(2) генераторот и трансформаторот G_{lim} , поради инсталираната снага на опремата:

$$Q_E \leq P_{INS}/(9.81\eta H_N) \quad (2.13)$$

(3) турбината T_{lim} , поради големината на нето падот:

$$Q_E \leq Q_{INS}(H_N/H_{nom})^{1/2} \quad (2.14)$$

Од ова ограничување произлегува дефиницијата за номиналниот нето пад H_{nom} дека тоа е минималниот нето пад при кој може да се развие инсталираната снага на опремата.

Производството на електрична енергија во временската рамка од Dt [h] = $DT[s]/3600$ е еднакво на:

$$E \text{ [kWh]} = 9.81 \cdot \eta \cdot H_N \cdot Q_E \cdot Dt \quad (2.15)$$

2.3. Интервални вредности на параметрите на ВСС и временска рамка во анализата на системот

При решавањето на задачата на синтеза на водостопански систем неопходно е да се утврдат граничните (или интервални) вредности на физичките параметри и да се усвои чекор на временска дискретизација при анализа на системот. Поради изразената непрецизност и меѓузависност на наведените големини, нивното определување претставува интуитивен реитеративен процес. Под физички параметри на системот се подразбираат големините чији вредности треба да се дефинираат при планирањето (синтеза) на системот: волумен на акумулација, (или височина на брана), ниво на инсталираност на ХЕЦ, големина на земјоделска површина опфатена со хидромелиоративен систем, капацитет за водоснабдување на индустрија или населено место. Со варирањето на вредностите на наведените физички параметри се добиваат соодветни варијанти за ВСС, за кои треба да се изврши анализа на системот. Во натамошниот текст ќе се задржиме на следниве два параметри: корисен простор на акумулацијата V_{kor}

и инсталирано протекување на хидроелектрична централа Q_{ins} , кои се карактеризираат со најголема неодреденост при усвојувањето на граничните големини, и имаат меродавно влијание врз усвојувањето на временскиот чекор на анализата на системот.

Утврдувањето на **интервалот** во кој ќе се избираат големините на физичките параметри (прв чекор при планирањето на ВСС, кој има значителен придонес во брзината и квалитетот на решавањето на задачата на синтеза), е интуитивен проблем, каде треба да се користи искуството од досега проектираните и изведените системи и тенденциите во доменот на физичките параметри.

Интервалните вредности за височината на браната, од која произлегува големината на акумулацијата, може да се усвојат како:

- максимална височина:
 - (а) за да не дојде до потопување на некое узводно населено место, културно историски споменик, инфраструктурен или стопански објект, и
 - (б) со која се исцрпуваат природните можности на преградното место според: геолошките, геомеханичките, хидрогеолошките и топографските услови, по однос на изводливоста на високи брани;
- минимална височина:
 - (а) со која ќе се обезбеди мртов простор за исталожување на нанос, и
 - (б) минимален корисен простор за временска прераспределба на протекувањата за задоволување на приоритетните корисници со потребна временска и количинска обезбеденост.

Од досегашното искуство може да се укажи на одредени **генерални тенденции** во поглед на оптималната инсталираност и оптималниот корисен волумен на акумулацијата, кои произлегуваат од следната закономерност: „Со зголемување на конзумот, се смалува уделот на хидроенергијата во вкупната потрошувачка (по апсолутен износ), на електрична енергија“.

- (1) Поради оваа закономерност се јавува тенденција на зголемување на вредноста на оптималното инсталирано протекување на ХЕЦ, што е последица на суперпозиција на следниве две влијанија:
 - (1а) Зголемување на потребата од варијабилна енергија. Со зголемување на потрошувачката на ЕЕ, се зголемува и базниот (константен) и врвниот (променлив) дел од дијаграмот на оптоварувањето (ДО) со снага на ЕЕС. ХЕЦ се карактеризираат со голема флексибилност и најефикасно го покриваат варијабилниот дел од ДО.
 - (1б) Смалување на неискористената снага на ХЕЦ. Со порастот на конзумот, како што се зголемува варијабилниот дел од ДО, така се зголемува и делот на сигурносната резерва во ЕЕС, кој најефикасно се покрива со ХЕЦ. Доколку не се следи зголеменото ангажирање на ХЕЦ во ЕЕС - со изведба на нови хидроенергетски капацитети со поголема инсталираност, тогаш за осигурување на ротационата резерва во системот би било неопходно ангажирање на ТЕЦ, што несомнено е неекономично работење на овие електрични централи.

(2) Поради наведената закономерност има тенденција на смалување на големината на оптималниот корисен волумен, што е последица на следниве две влијанија:

(2а) Со зголемување на инсталираното протекување на ХЕЦ е можно хидроенергетско искористување на водите и без голем степен на израмнување. Односно, нема потреба за засилено предпразнење на акумулацијата пред полноводен период, бидејќи големата инсталираност гарантира дека нема да дојде до енергетски неискористено преливање.

(2б) Со зголемување на уделот на термоенергијата, критичниот период во ЕЕС се поместува во зимскиот период на големи оптоварувања (зголемена побарувачка на ЕЕ), кога дотекувањата во акумулацијата се поголеми и кога во ХЕЦ има поповолна хидролошка состојба за хидроенергетско производство.

Вториот клучен елемент при планирањето на ВСС се однесува на правилниот избор на прирастот на **временската** координата во решавањето на задачата на анализа, кој е во непосредна корелација со граничните вредности на физичките параметри. Усвојувањето на чекорот на временската дискретизација при анализа на ВСС, зависи од карактеристиките на: водотекот, акумулацијата и инсталираноста на ХЕЦ, кои се проценуваат според коефициентите α , β и γ (Đorđević B., 1981.), на следниов начин:

- Според големината на инсталираноста на ХЕЦ:

$$\alpha = Q_{\text{ins}} / Q_{\text{sr}} \quad (2.16)$$

разликуваме: (1) проточна ХЕЦ за $\alpha = 1.0 \div 1.3$; (2) ХЕЦ со дневно регулирање за $\alpha = 1.2 \div 1.6$; (3) ХЕЦ со неделно регулирање за $\alpha = 1.4 \div 1.8$; (4) ХЕЦ со сезонско регулирање за $\alpha = 1.6 \div 3.2$ и (5) ХЕЦ со повеќегодишно регулирање за $\alpha = 3.0 \div 5.0$.

- Според степенот на израмнување во акумулацијата:

$$\beta = V_{\text{KOR}} / V_{\text{GOD}} \quad (2.17)$$

каде $V_{\text{GOD}} = 31.536 \cdot 10^6 \cdot Q_{\text{sr}}$ е средногодишно дотекување во акумулацијата, граничната вредност за поделба на проточна и акумулациона ХЕЦ изнесува $\beta = 0.05$.

- Според времето на празнење на акумулацијата (во часови, со претпоставка за нулто дотекување)

$$\gamma = V_{\text{KOR}} / (3600 \cdot Q_{\text{ins}}) \quad (2.18)$$

ХЕЦ се делат на: (1) протечни ако $\gamma < 2$ h; (2) акумулациони со дневно и неделно израмнување ако $\gamma = (2 \div 400)$ h, и (3) акумулациони со сезонско израмнување ако $\gamma > 400$ h.

Наведените коефициенти не треба да се третираат како строга закономерност, зашто може да упатуваат на вредности за регулациониот капацитет на акумулациите кои меѓусебе се преклопуваат (како што може да се забележи од вредностите за коефициентите α , β и γ , за поголемите системи во Република Македонија, дадени во [табела 2.1](#)), па затоа имаат ориентационен

карактер, правилно да го насочат планерот на ВСС. Изборот на прирастот за временската дискретизација при анализа на ВСС мора да биде прилагоден на капацитетот за регулирање на протекувањата на акумулацијата. Временскиот чекор во анализата мора да биде помал или еднаков на временската рамка на можностите за регулирање на протекувањата во акумулацијата. Така на пример, бесмислена би била анализа на месечно управување за ВСС со големина на акумулација со капацитет за дневна или неделна прераспределба на протекувањата.

Таб. 2.1. Основни параметри на поголемите ВСС во Република Македонија ([*] - изградени или во фаза на планирање во 2005 година)

RB	Систем	Q_{sr}	Q_{ins}	V_{kor}	α	β	γ
		m ³ /s	m ³ /s	10 ⁶ m ³	-	-	h
1	Глобочица	34.13	50.0	13.2	1.465	0.012	73
2	Шпиље	58.80	90.0	78.0	1.531	0.042	241
3	Маврово (ХЕЦ Вруток)	8.70	32.0	274.5	3.678	1.000	2,383
4	Тиквеш	37.40	120.0	360.0	3.209	0.305	833
5	Калиманци	11.72	18.0	120.0	1.536	0.325	1,852
6	Стрежево		8.0	99.5			3,455
7	Глажња	1.10	4.0	24.0	3.636	0.692	1,667
8	Мантово		-	38.5	-		-
9	Водоча	0.68	-	25.1	-	1.170	-
10	Козјак (100+260) Mm ³	22.59	100.0	360.0	4.427	0.505	1,000
11	* Св. Петка	22.59	100.0	1.6	4.427	0.002	4
12	* Нова Матка	25.36	39.5	1.0	1.558	0.001	7
13	Турија	1.75	4.0	45.0	2.286	0.815	3,125

2.4. Карактеристики на нивото на инсталираност на ХЕЦ

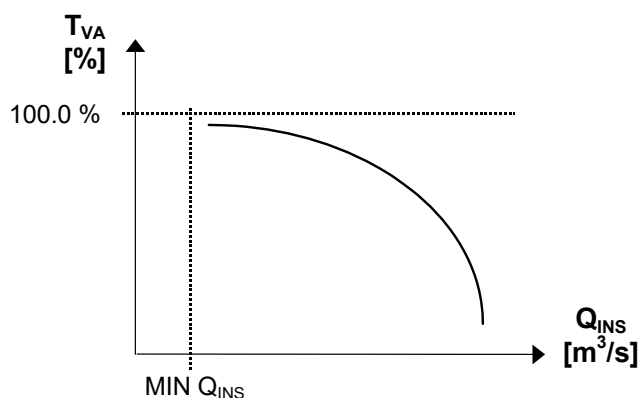
Треба да се истакне дека генералните тенденции во доменот на оптималните вредности на физичките параметри на ВСС со хидроцентрали претставуваат ориентациона, почетна рамка во која се спроведуваат натамошните анализи. Така, за секоја анализирана ХЕЦ, потребно е да се утврдат карактеристиките на нивото на инсталираност, кои се однесуваат за:

- (I) екстремните вредности на инсталираното протекување, и
- (II) зависноста меѓу волуменот на корисниот простор и инсталираното протекување.

Карактеристиките на нивото на инсталираност на ХЕЦ стануваат сè поактуелни во водостопанските и хидроенергетските планирања, бидејќи се инваријанта од економските анализи. Имено, економските анализи, иако најчесто се меродавни при донесувањето на одлука за инсталираноста на ХЕЦ, содржат високо ниво на

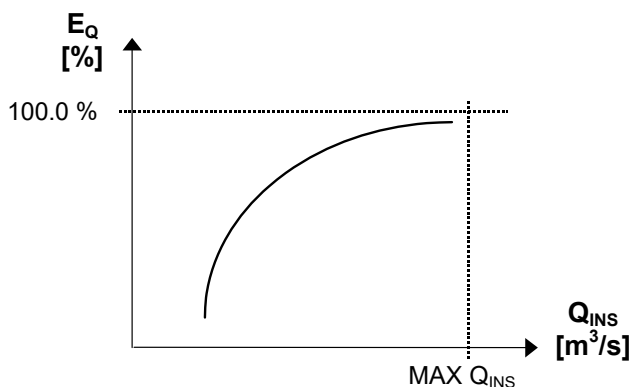
неодреденост, на пример, неизвесноста за клучниот економски параметар - предвидена цена на електрична енергија и снага во експлоатациониот период. Затоа, познавањето на карактеристиките на нивото на инсталираноста, кои зависат само од расположливите водни ресурси и физичкиот капацитет на построението, ја зголемуваат доверливоста на усвоеното решение за доносителот на одлуката за параметрите на ВСС.

Екстремните вредности на инсталираното протекување (во чии рамки се избира оптималната вредност), се однесуваат на: минималното и максималното протекување. Минимално протекување е она инсталирано протекување на ХЕЦ со кое се достигнува горната граница на временската ангажираност на построението T_{VA} , [слика 2.4](#). За тоа протекување централата е со целосна дневна ангажираност за енергетски да го искористи водниот потенцијал. Затоа, анализа со помали инсталираности би била бесмислена, бидејќи би се добиле големи преливања, или енергетски неискористени протекувања, и значајно намалување на производството на електрична енергија.



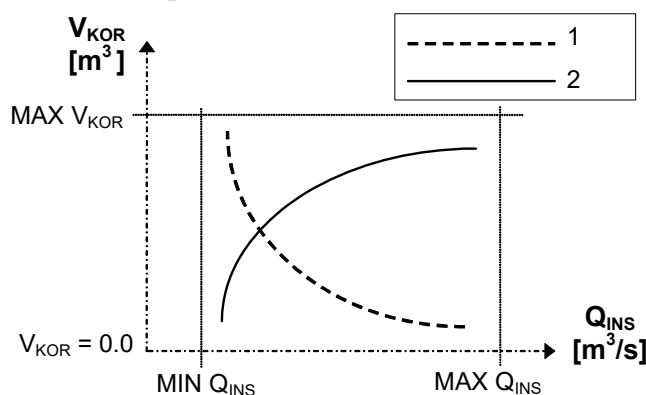
Сл. 2.4. Временска ангажираност на хидроцентрала

Максимално протекување е инсталираното протекување со кое се постигнува горната граница на енергетско искористување на расположливиот воден ресурс E_Q , [слика 2.5](#). За тоа протекување, неискористените преливања се занемарливи, односно се постигнува количинско исцрпување на водниот ресурс. Затоа, анализа со поголема инсталираност би била нелогична, бидејќи би се зголемувале само трошоците на системот, а добивките од зголемено производство на ЕЕ би биле незначителни.



Сл. 2.5. Енергетско количинско исцрпување на расположливиот воден ресурс

Доминантно влијание врз зависноста меѓу корисниот простор и инсталираното протекување (слика 2.6) на релативно мала ХЕЦ, каде е можен целосен пласман на нејзината снага и произведена енергија во ЕЕС, имаат карактеристиките на анализираниот ВСС.

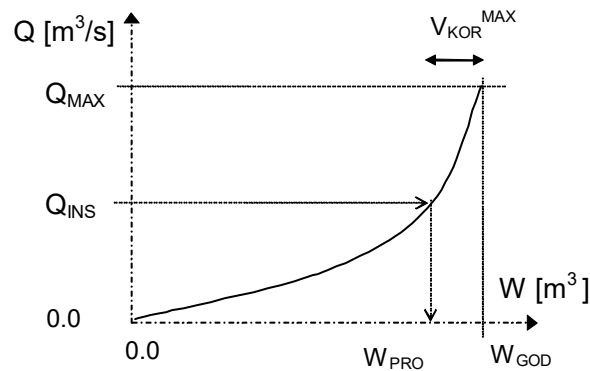


Сл. 2.6. Зависност помеѓу корисниот простор и инсталираното протекување. 1 - класичен метод, 2 - современ метод

Оваа зависност може да биде напoлно спротивна од зависноста што произлегува од генералните тенденции во доменот на физичките параметри на ВСС. Зголемувањето на корисниот простор поради зголемувањето на инсталираното протекување може да биде предизвикано од следните причини:

- (1) За мали инсталирани протекувања, голем корисен простор би бил нерационален, бидејќи системот физички не може да ги достигне пониските нивои во акумулацијата. Поради малата управувачка способност на системот, тој не е во состојба да изврши празнење на акумулацијата, за да ги магационира водите во полноводните периоди.
- (2) За големи инсталирани протекувања, зголемената управувачка способност на системот „повлекува“ зголемување на корисниот простор за временска прераспределба на протекувањата, со што се обезбедува:
 - (2а) зголемена количина на енергетско користење на водата, (намалено преливање) поради можноста за брзо празнење на големиот корисен простор пред појава на големи дотекувања, и
 - (2б) подобрување на квалитетот на сезонското енергетското користење на водниот ресурс, поради можноста за магационирање на водата во летните и користење во зимските месеци (без опасност од преливање во полноводните периоди, поради големото инсталирано протекување), со што се произведува „повредна“ енергија.

Кај анализите на ВСС спроведени со класични методи, поради ограничената пресметувачка способност на овие методи, се користи хидролошка информација во кондензирана форма - интегрална линија на анализа (ИЛА), односно интеграл на линијата на траење на дотекувањата, слика 2.7.



Сл. 2.7. Интегрална линија на анализа за одредено преградно место

Со користење на ИЛА, со зголемување на инсталираното протекување Q_{INS} се зголемува проточната количина W_{PRO} . Проточната количина, што се отчитува од ИЛА, е дел од годишната количина на дотекувања, која ХЕЦ енергетски би ја преработила - доколку нема сопствена акумулација. Затоа, кај традиционалните методи, со зголемување на инсталираноста на ХЕЦ се намалува вредноста на максималниот корисен волумен V_{KOR}^{MAX} , и е можно само издигнување на котата на оптимално минимално ниво, односно намалување на корисниот волумен V_{KOR} во акумулацијата. Оваа констатација се формализира со следнава релација:

$$V_{KOR} \in [0.0, V_{KOR}^{MAX}]; \quad V_{KOR}^{MAX} = W_{GOD} - W_{PRO}(Q_{INS}) \quad (2.19)$$

Со класичниот метод може да се изведат погрешни заклучоци, поради „губење“ на релевантните информации за временската нерамномерност на дотекувањата во ИЛА. Оваа констатација се потврдува за граничните големина на зависноста меѓу корисниот волумен и инсталираноста (слика 2.7). Имено, за многу мала инсталираност (помала од дотекувањата во акумулацијата), исполнетоста би била на „нормално ниво“, би имало преливање и системот не би бил во состојба да ја испразни акумулацијата. Парадоксот кај класичниот метод е дека тогаш е потребен најголем волумен на корисниот простор, чии нивои при реално управување физички не може да се достигнат. Затоа наведените големина и зависимости потребно е да бидат определени со системски анализи на ВСС, со примена на современи нумерички методи. Во современите нумерички анализи влезните големина се векторски серии на репрезентативни хидролошки низи - хронолошки подредени, а не нивна апроксимација во кондензирана форма, претставена со ИЛА.

* * *

Ако оптималните вредности на физичките параметри на ВСС ги наоѓаме со користење на следниот критериум на оптимизација: „Максимизација на разликата меѓу: (1) годишни добивки или заштеди во ЕЕС поради внесување на анализираната ХЕЦ во системот (енергетска вредност на ХЕЦ) и (2) годишни трошоци на анализираната ХЕЦ“, тогаш е очигледно дека параметрите на ВСС со ХЕЦ зависат од:

- (а) карактеристиките на анализираната ХЕЦ, и
- (б) карактеристиките на ЕЕС каде што истата ќе биде вклучена во експлоатација.

Карактеристиките на ЕЕС се менуваат во тек на времето, па затоа оптималните вредности на физичките параметри на системот треба да се

третираат како динамичка категорија. Најповолно би било, доколку е технички изводливо, параметрите на ВСС да се прилагодуваат на новосоздадените состојби во ЕЕС, односно уште во текот на планирањето да се определиме за фазна изградба на построението. Затоа анализите на ВСС треба да се спроведат за различни нивоа на конзумот и карактеристики на ЕЕС, за да се согледаат тенденциите во доменот на големините на физичките параметри на ВСС.

Бидејќи клучните параметри на ВСС: големина на акумулација, пад и должина на довод остануваат фиксни кај изградена ХЕЦ, многу е важно, уште во почетната фаза на планирање да се предвидат можности за промени:

- (I) Зголемување на инсталираното протекување со физичка интервенција во ВСС. Со проектирањето на: зафатната градба, деривацијата и машинската зграда треба да се предвидат можности за зголемување на инсталираноста, после одредена етапа на развој на ЕЕС. Тоа се однесува за: предвидување на локација за нова зафатна градба, можност за изведба на нова деривација, место за нови агрегати во постојната машинска сала или сочувано место за изведба на нова зграда.
- (II) Намалување на корисниот простор со промена на оперативното управување со ВСС. При планирањето на системот, треба да се утврди зависноста на оптималниот корисен простор во функција од карактеристиките на ЕЕС. Положбата и диспозицијата на зафатните органи мора да се усвојат врз база на оваа анализа. Котата на зафаќање би била условена од максималната вредност на оптималните корисни простори, кои би се јавиле во експлоатација, за одредени етапи на развој на ЕЕС.

2.5. Оптимизација на зависни физички параметри

Внесувањето на зависните физички параметри при решавањето на задачата на оптимална синтеза на ВСС произлегува од следната размисла. Под физички параметри на системот се подразбираат оние параметри на системот чиј вредности ги определуваме со решавање на задачата на синтеза. Генерално, планирањето на ВСС треба да се изврши по однос на сите физички параметри: кота на нормално ниво (корисен простор на акумулацијата), инсталирано протекување, геометриски димензии на објектите од доводната и одводната деривација на ХЕЦ, тип и број на турбини итн, бидејќи постои зависност меѓу наведените параметри. Ваквиот приод еноормно го зголемува обемот на пресметките и планирањето на ВСС го прави практично неизводливо. Затоа, вообичаена е апроксимација на независни (корисен простор и инсталирано протекување) и зависни физички параметри (останатите параметри од системот). На овој начин се намалува обемот на пресметување при решавање на задачата на синтеза на системот, бидејќи се усвојуваат вредности за независни физички големини, а зависните физички параметри се определуваат во корелација од независните.

Во групата на зависни параметри спаѓаат оние кои се во функција од инсталираноста на построението, односно објектите на доводната и одводната деривација на анализираната хидроцентрала (АХЕЦ). При решавање на задачата на оптимална синтеза тоа се: дијаметарот на доводен тунел $D = D(Q_{ins})$, дијаметарот на површински цевковод $d = d(Q_{ins})$, или дијаметарот на цевковод

низ тело на бетонска брана $d = d(Q_{ins})$ и ширината на дно на одводната вада $b = b(Q_{ins})$, чии оптимални вредности, за различни инсталираности, се определуваат од условот за минимизација на сумарните експлоатациони трошоци K_s [d/g] во мешовитиот електроенергетски систем (МЕЕС).

Оптималната вредност на дијаметарот на било кој доведен објект под притисок се пресметува со користење на следните релации:

$$\min_{\{d\}} \{K_s = K_d + K_{ep}\} \Rightarrow d_{opt} \quad (2.20)$$

$$K_d = \beta \cdot I_d; I_d = \alpha \cdot T_d \cdot m_c \quad (2.20.1)$$

$$K_{ep} = K_e + K_p; \quad K_e = k_b \cdot dE \quad (2.20.2)$$

$$K_p = \beta_t \cdot \rho_t \cdot dP$$

$$dP = \rho g \cdot \eta \cdot dh \cdot Q_{ins} \quad (2.21.1)$$

$$dE = \rho g \cdot \eta \cdot dh \cdot \frac{W_g - W_z}{3600} \cdot (\alpha_1 + p - p \cdot \alpha_1) \quad (2.21.2)$$

$$W_z = W_{is} + W_f + W_{pr} + W_k; \quad \eta = \eta_t \cdot \eta_g \cdot \eta_{tr}$$

$$dh = \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum \xi_j \right) \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}; \quad V = \frac{4 \cdot Q_{ins}}{m_c \cdot d^2 \cdot \pi} \quad (2.21.3)$$

$$\lambda = \frac{8 \cdot g \cdot n^2}{R^{2y}}; \quad y = 2.5 \cdot \sqrt{n} - 0.13 - 0.75 \cdot \sqrt{R} \cdot (\sqrt{n} - 0.1)$$

Во горните изрази, ознаките го имаат следново значење:

K_d [d/g]	годишни трошоци на доводниот орган,
K_{ep} [d/g]	годишни трошоци во МЕЕС за изгубена енергија и снага,
I_d [d]	инвестициона вредност на доводниот објект,
T_d [d]	пресметковна вредност на доводот,
α	коефициент за трансформација на пресметковната во инвестициона вредност,
β	коефициент за трансформација на инвестициите во експлоатациони трошоци,
m_c	број на цевководи,
dP [kW]	изгубена снага,
k_b [d/kWh]	специфични променливи трошоци за производство на [kWh] енергија во термоцентралите (ТЕЦ) од МЕЕС,
ρ_t [d/kW]	единечни инвестициони трошоци за изградба на [kW] снага во ТЕЦ,
β_t	бездимензионален коефициент за трансформација на инвестициони во годишни трошоци кај ТЕЦ,
dE [kWh/g]	годишна количина на изгубена пондерисана енергија,
η	коефициент на корисно дејство (ккд) на праг на хидроцентралата,
dh [mVS]	загуба на притисок низ доводниот орган при инсталирано протекнување,

- α_1 коефициент за предвидена енергетски обработена вода во летните месеци,
- p коефициент на пондерација, однос меѓу чинењето на зимска и летна енергија
- $W_g = Q_{sr} \cdot 31.536 \cdot 10^6 \text{ [m}^3/\text{g]}$ средногодишно дотекување во акумулацијата,
- $W_z \text{ [m}^3/\text{g]}$ годишна количина на неенергетски искористена вода, „потрошена“ за: испарување, филтрација, преливање и директни приоритетни водокорисници.

2.6. Математичка формализација на топографски и енергетски зависимости

Во модулот за математичка формализација на топографската зависност се определува аналитичката релација $Z = Z(V)$, зависност на кота на горна вода $Z \text{ [mNV]}$ од волуменот на вода во акумулациониот базен $V \text{ [m}^3]$, која е неопходна за определување на средна кота на горна вода и пресметување на бруто падот на ХЕЦ во тековниот временски интервал. Ако карактеристиките на акумулацијата се такви да има големо висинско растојание меѓу котите на минималното работно ниво (мртов простор) и максималното работно ниво (нормално ниво), тогаш не може да се прифати апроксимацијата за приближно константна вредност на “ η ” коефициентот на корисно дејство (ккд) на праг на ХЕЦ за различни исполнетости во акумулацијата. Доколку постојат различни можности за ангажирана снага на ХЕЦ, тогаш е неопходен дополнителен модул каде би се пресметувал ккд на турбината во функција од моќноста $\eta_t = \eta(H, Q)$, или ако се усвои константно протекување тогаш во функција од кота на горна вода $\eta_t = \eta(Z)$. Топографската и енергетската зависност најприкладно се дефинираа во вид на полиноми чии коефициенти се определуваат со **методот на најмали квадрати** (МНК).

За разлика од задачата на интерполација (определување на функција која минува низ зададено множество на точки), МНК се применува за определување на функција која најдобро се прилагодува на забележаните вредности, без да се бара истите да лежат на нејзиниот график. Имено, ако при проучувањето на зависноста $Y = f(X)$ се познати “ N ” податоци $\{x_i, y_i; i=1, N\}$, тогаш со МНК се определува таква аналитичка зависност (полином од $k^{\text{та}}$ степен) што сумата на квадратите на разликите е минимална:

$$S = \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i)]^2 \Rightarrow \min \quad (2.22)$$

Зависно од степенот на полиномот, разликуваме: за $k = 1$ линеарна регресија, за $k = 2$ квадратна регресија, за $k = 3$ кубна регресија, итн.

$$f(X) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_{k+1} x^k \quad (2.23)$$

За пресметување на непознатите регресиони коефициенти $\{a_j; j=1, k+1\}$ од полиномот се користи условот дека за функција од $(k+1)$ независни променливи, потребниот услов за екстрем е парцијалните изводи да бидат еднакви на нула. Со замена на равенката во условот за минимизација се добива следната релација:

$$S = \sum_{i=1}^N \left[y_i - (a_1 + a_2 x_i + a_3 x_i^2 + \dots + a_{k+1} x_i^k) \right]^2 \quad (2.24)$$

Парцијалните изводи на функцијата “S” по однос на независните променливи регресиони коефициенти се внесени во следниот изразот:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_1} &= 2 \sum_{i=1}^N [y_i - (a_1 + a_2 x_i + a_3 x_i^2 + \dots + a_{k+1} x_i^k)](-1) \\ \frac{\partial S}{\partial a_2} &= 2 \sum_{i=1}^N [y_i - (a_1 + a_2 x_i + a_3 x_i^2 + \dots + a_{k+1} x_i^k)](-x_i) \\ &\vdots \\ \frac{\partial S}{\partial a_{k+1}} &= 2 \sum_{i=1}^N [y_i - (a_1 + a_2 x_i + a_3 x_i^2 + \dots + a_{k+1} x_i^k)](-x_i^k) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Запишано во кондензирана форма:

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 2 \sum_{i=1}^N [y_i - (a_1 + a_2 x_i + a_3 x_i^2 + \dots + a_{k+1} x_i^k)](-x_i^{j-1}); \quad j = 1, k+1 \quad (2.26)$$

Со прирамнување на парцијалните изводи на нула:

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0.0; \quad j = 1, k+1 \quad (2.27)$$

се добива систем од k+1 линеарни равенки:

$$\sum_{i=1}^N (a_1 x_i^{j-1}) + \sum_{i=1}^N (a_2 x_i x_i^{j-1}) + \dots + \sum_{i=1}^N (a_{k+1} x_i^k x_i^{j-1}) = \sum_{i=1}^N (y_i x_i^{j-1}); \quad j = 1, k+1 \quad (2.28)$$

или со соодветни трансформации се добива:

$$a_1 \sum_{i=1}^N x_i^{j-1} + a_2 \sum_{i=1}^N x_i^j + \dots + a_{k+1} \sum_{i=1}^N x_i^{k+j-1} = \sum_{i=1}^N (y_i x_i^{j-1}); \quad j = 1, k+1 \quad (2.29)$$

Овој систем, претставен во матрична форма, би бил:

$$[B]_{(k+1)(k+1)} * \{a\}_{(k+1)1} = \{b\}_{(k+1)1} \quad (2.30)$$

каде [B] е матрица на системот (квадратна симетрична матрица на коефициенти пред непознатите), {a} е вектор на непознатите, а {b} е вектор на слободните членови, чии изрази се дадени во следната релација:

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_i & \dots & \sum_{i=1}^N x_i^k \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^N x_i^{k+1} \\ \vdots & & & \\ \sum_{i=1}^N x_i^k & \sum_{i=1}^N x_i^{k+1} & \dots & \sum_{i=1}^N x_i^{2k} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^N y_i \\ \sum_{i=1}^N x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N x_i^k y_i \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

Со решавање на системот линеарни равенки, со методот на елиминација на Gauss⁷ (Гаус), се определуваат непознатите регресиони коефициенти a_i од равенката $f(X)$.

2.7. Комбиниран модел за сезонско управување со примена на повеќестепенена линеарна корелација

Моделот за симулација на реалното (секвенционално) управување со ВСС, се изведува со користење на вредностите од оптималното управување со системот во идниот експлоатационен период, определени со историските низи на влезни податоци (или детерминистичка оптимизација). Доколку симулациониот модел за сезонско (месечно) управување со ВСС е базиран на корелација или конвенционална двовалентна логика, тогаш симулациониот модел се нарекува регресионен или конвенционален контролер. Математичката основа на регресиониот контролер најчесто е **повеќекратната линеарна корелација**, која што е објаснета во натамошниот текст.

Поврзаноста на $M \geq 3$ варијабли, за кои се забележани “N” вредности, може да се испитува со корелација од повеќе променливи, изразена со следната релација:

$$x_1 = f(x_2, x_3, \dots, x_M) \quad (2.32)$$

Ако наведената равенка е линеарна, тогаш се работи за повеќестепенена линеарна корелација, која го има следниот облик:

$$x_1 = A_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + \dots + A_M x_M \quad (2.33)$$

каде што: x_1 е зависна варијабла, $\{x_2, x_3, \dots, x_M\}$ се независни варијабли и $\{A_1, A_2, \dots, A_M\}$ се непознати корелациони коефициенти.

Со користење на методот на најмали квадрати се добиваат “M” линеарни равенки, кои претставени во матрична форма, го имаат следниот облик:

$$[B]_{MM} * \{a\}_{M1} = \{b\}_{M1} \quad (2.34)$$

каде што: $[B]$ е матрицата на коефициенти пред непознатите, $\{a\}$ е векторот на непознатите, и $\{b\}$ е векторот на слободните членови.

Ако се воведат замените:

$$\begin{aligned} x_i^s &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_{ik}; \quad i = 1, M \\ dx_i &= x_i^s - x_{ik}; \quad i = 1, M; k = 1, N \\ \sum dx_i dx_j &= \sum_{k=1}^N x_{ik} x_{kj} - N x_i^s x_j^s; \quad i = 1, M; j = 1, M \end{aligned} \quad (2.35)$$

тогаш матричната равенка ќе го добие следниот облик:

⁷ Johann Carl Friedrich Gauss, Latin: Carolus Fridericus Gauss) (30 April 1777 ÷ 23 February 1855), was a German mathematician and scientist who contributed significantly to many fields, including number theory, statistics, analysis, differential geometry, geodesy, geophysics, electrostatics, astronomy and optics.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_2^s & x_3^s & \dots & x_M^s \\ 0 & \sum dx_2 dx_2 & \sum dx_2 dx_3 & \dots & \sum dx_2 dx_M \\ 0 & \sum dx_3 dx_2 & \sum dx_3 dx_3 & \dots & \sum dx_3 dx_M \\ \vdots & & & & \\ 0 & \sum dx_M dx_2 & \sum dx_M dx_3 & \dots & \sum dx_M dx_M \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1^s \\ \sum dx_2 dx_1 \\ \sum dx_3 dx_1 \\ \vdots \\ \sum dx_M dx_1 \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

Со решавање на горниот систем, со методот на Гаус, се добиваат вредностите на корелационите коефициенти $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_M\}$.

Мерки на линеарната регресија меѓу повеќе променливи се:

- (1) Стандардна девијација на отстапувања σ_1 (мерка за прилагодување на забележаните со пресметаните вредности);

$$\sigma_1 = \left[\frac{1}{N-M} \left(\sum dx_1 dx_1 - A_2 \sum dx_1 dx_2 - A_3 \sum dx_1 dx_3 - \dots - A_M \sum dx_1 dx_M \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.37)$$

- (2) Општ корелационен коефициент r_1 (кој го соединува влијанието на сите независни варијабли и е мерка за квалитет на регресијата);

$$r_1 = \left[\frac{1}{\sum dx_1 dx_1} \left(A_2 \sum dx_1 dx_2 + A_3 \sum dx_1 dx_3 + \dots + A_M \sum dx_1 dx_M \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.38)$$

- (3) Парцијален корелационен коефициент r_{1i} (кој е мерка на влијанието, поврзаноста на $i^{тата}$ независна варијабла x_i со зависната променлива x_1).

$$r_{1i} = \sqrt{1 - \frac{1 - r_1^2}{1 - r_{0i}^2}} \quad (2.39)$$

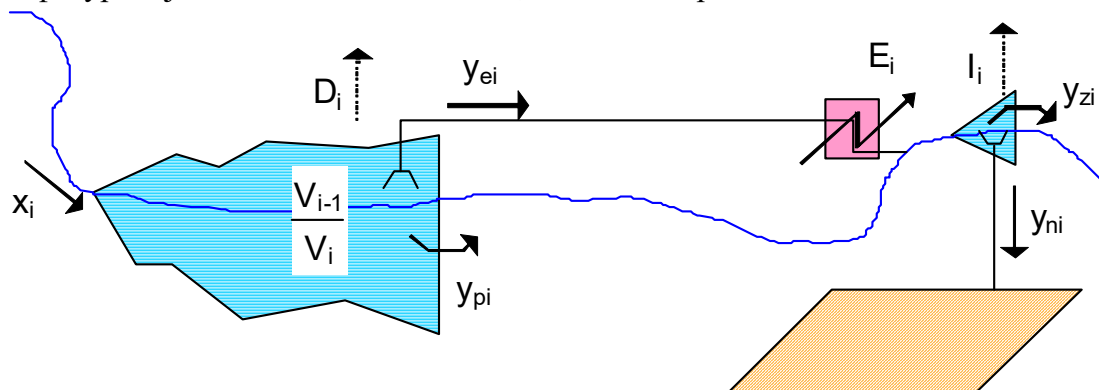
Во претходната равенка r_{0i} е општ корелационен коефициент помеѓу x_1 и независните варијабли $\{x_j; j=2, M-1\}$ каде не е внесена варијаблата x_i .

* * *

Регресиониот контролер, изведен со примена на регресиона анализа за резултатите од детерминистичка оптимизација, мора да биде прилагоден на конфигурацијата на системот и на усвоената временска дискретизација на управувањето. Развојот на регресиониот контролер (РК) ги содржи следните фази: идентификација, калибрирање, верификација и симулација. Во почетната фаза (идентификација) треба да се издвојат оние параметри на состојбите и управувањето кои имаат доминантно влијание врз оптималното управување со ВСС (излезот од акумулацијата y_i). Во следната фаза (подесување или калибрирање) треба да се дефинираат независните променливи во РК, каде како индикација се користат вредностите за парцијалните корелациони коефициенти. Критериум за квалитет на РК при калибрирањето е максимизација на општиот корелационен коефициент, како мерка за квалитетот на регресијата. За верификација на регресиониот контролер на управувањето со ВСС се прави споредба на естимираното и оптималното управување, при што ефикасноста на симулираното (реално) од оптималното (идеално) управување треба да отстапува во прифатливи граници. Во крајната фаза, симулација, треба да се изврши тестирање на РК на повеќе сценарија за идниот експлоатационен период, со цел

да се провери функционалната сигурност на системот, односно реализирањето на поставените цели.

За симулирање на управувањето со ВСС во натамошниот текст се презентирани две структури на регресиони контролери прилагодени на конфигурацијата на хипотетички ВСС, шематски прикажан на [слика 2.8](#).



Сл. 2.8. Шема на едноакумулационен ВСС со двократно користење на водниот ресурс

Со првиот контролер се естимира месечното испуштање од акумулацијата y_i [m^3/mes], со општи регресиони коефициенти (независни од редниот број на месецот), кој може да е апроксимиран со следната линеарната форма:

$$y_i = a_1 + a_2 \cdot z_{i-1} + a_3 \cdot (C_{ei} D_{mi}) + a_4 \cdot D_i + a_5 \cdot I_i + a_6 \cdot x_i + a_7 \cdot N_i \quad (2.40)$$

Ознаките во оваа равенка го имаат следното значење:

$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ се регресиони коефициенти добиени со повеќекратна линеарна корелација и користење на податоците од оптималното управување со ВСС за историски низи на влезни податоци.

z_{i-1} [m^3] е регистрираната исполнетост во корисниот простор на почеток од разгледуваниот временски период.

$(C_{ei} D_{mi})$ е производ од „тежината“ на цената на електричната енергија и бројот на деновите во тековниот месец.

D_i [m^3/mes] е предвидената месечна потрошувачка на директните приоритетни водокорисници.

I_i [m^3/mes] е предвидената месечна потрошувачка на индиректните приоритетни водокорисници.

x_i [m^3/mes] е прогнозирано дотекување во акумулацијата во разгледуваниот месец.

N_i [m^3/mes] е прогнозирана потреба за наводнување од системот.

Со вториот контролер се симулира крајната исполнетост во акумулацијата z_i [m^3], со месечни регресиони коефициенти, според следната релација:

$$z_i = a_{1,j} + a_{2,j} \cdot z_{i-1} + a_{3,j} \cdot x_i + a_{4,j} \cdot N_i + a_{5,j} \cdot (C_{ei} D_{mi}) + a_{6,j} \cdot D_i + a_{7,j} \cdot I_i \quad j=1,12 \quad (2.41)$$

Во оваа равенка $\{a_{1,j}, a_{2,j}, a_{3,j}, a_{4,j}, a_{5,j}, a_{6,j}, a_{7,j}; j=1,12\}$ се месечни регресиони коефициенти добиени со повеќекратна линеарна корелација и користење на податоците од оптималното управување со ВСС за историски низи на влезни податоци. Изборот на најприкладната структура на регресиониот контролер е

преку тестирање на контролерите на реален управувачки проблем и споредбена анализа на резултатите од симулационото управување со ВСС.

3. Методи на математичкото програмирање и примена кај ВСС

3.1. Предмет на операционите истражувања

Во оптимизационите модели за решавање на управувачките задачи со водостопанските системи, за изнаоѓање на оптималното решение, се користат методите на операционите истражувања. Предмет на операционите истражувања (или математичкото програмирање), е управувањето со организациони, биолошки, технички и други системи, со цел да се изнајдат оптимални резултати за припремање и донесување одлуки. Поедноставната формулација за целта на операционите истражувања е *решавање на оптимизациони задачи*.

Задача на оптимизација е проблем каде се бара екстрем на функција од “n” променливи, кои задоволуваат одредени “m” ограничувања или услови. Во математичката анализа, задачите од овај тип се нарекуваат задачи со изнаоѓање на условен екстрем. За секое управување мора да биде утврдена целта врз чија основа се цени квалитетот на управувањето. Кога вербалниот опис на целта ќе се изрази со математички релации се добива целната функција:

$$F(x); X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (3.1)$$

каде “X” е “n” димензионален вектор. Множеството од “m” услови (равенки) и/или ограничувања (неравенки), каде фигурираат компонентите на векторот “X”, претставува лимитирачки фактор “L”. Со $m^{\text{те}}$ релации се дефинираат “m” хиперповршини во “n” димензионалниот простор, со кои се утврдува областа на дозволените решенија “D”. Множеството на ограничувањата “D”, во реалните оптимизациони задачи вообичаено се дополнува со множеството на природните ограничувања “P”, кое се изразува со условите за ненегативност:

$$P: \{x_i \geq 0; \quad i = 1, n\} \quad (3.2)$$

кои од математички аспект не се разликуваат од другите услови. Вредностите на “X” од областа “D” се нарекуваат дозволени решенија X_{doz} , а она X_{doz} кое ја екстремизира целната функција $F(x)$ претставува оптимално решение X_{opt} . Множеството на ограничувања може да ги има следните својства:

- (а) множеството “L” е противречно (што значи дека не постои дозволено решение кое ги задоволува сите ограничувања),
- (б) множеството “L” не е противречно, но областа “D” е неограничена (можно е изнаоѓање на оптимално решение само ако целната функција е ограничена во неограничената област “D”), и
- (в) множеството “L” не е противречно и областа “D” е ограничена (можно е изнаоѓање на оптимално решение во сите случаи, освен ако целната функција е неограничена во ограничената област “D”).

Математичкиот модел на оптимизационата задача (составен од целната функција и множеството на ограничувања и/или услови), претставува аналитичка формализација на критериумот “J” (за екстремизација, минимум или максимум на целната функција од “n” променливи), и лимитирачкиот фактор “L” составен од “m” релации:

$$\begin{aligned}
 J: \quad & eksF_{(X)} = F_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} \\
 L: \quad & g_{i(X)} = g_{i(x_1, x_2, \dots, x_n)} \begin{cases} \leq \\ \equiv \\ \geq \end{cases} 0.0; \quad i = 1, m
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

За определување на решението на оптимизационата задача со помош на математичкиот модел можни се две постапки: (а) аналитичка, со која се добива егзактно, точно решение и (б) нумеричка, за добивање на апроксимативно, приближно решение. Поради сложеноста на математичките модели на реалните оптимизациони задачи практичната примена на нумеричкиот приод за добивање на приближно решение (со задоволителна точност) е многу поголема.

Методите на операционите истражувања во втората половина од XX век бележат интензивен подем, поради зголемената потреба од решавање на оптимизациони задачи при управувањето со сè посложените системи и експлозивниот развој на информатиката со унапредувањето на хардверот и софтверот. Денес задачите на математичкото програмирање може да се систематизираат во следните класи:

ЛП - линеарно програмирање,

НП - нелинеарно програмирање,

ДП - динамичко програмирање,

ОР - оптимално резервирање,

ХП - хеуристичко програмирање,

ТИ - теорија на игри,

МП - мрежно планирање,

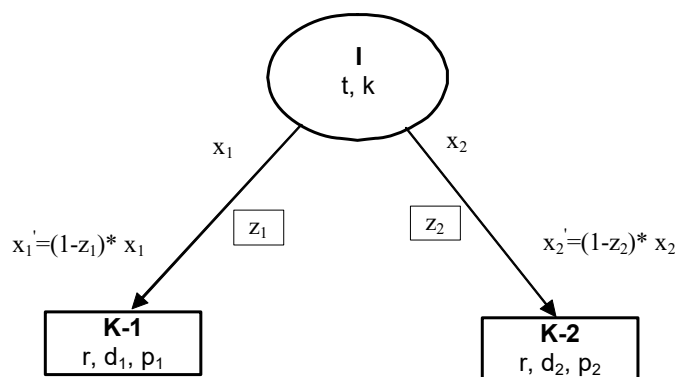
УЗ - управување со залихи и други.

Во рамките на наведените класи на задачи развиени се голем број на методи за конкретни оптимизациони задачи со прецизно дефинирани математички модели.

Алгоритмот за пресметување на одреден број од методите на операционите истражувања е стандарден, така што за практична примена (од инженерски аспект), оптимизациониот проблем се сведува на - идентификација и аналитичка формализација на математичкиот модел. Решавањето на оптимизациони проблеми од ЛП и НП со формулиран математички модел, во поново време е поедноставено, и се извршува со користење на: (а) библиотеки на субрутини за решавање на оптимизациони задачи кај програмските јазици (на пример, библиотека Minimization or Maximization of Functions - FORTRAN) или (б) алатки од комерцијален софтвер (на пример, Solver - MS Excel). Така, за одредена група на инженерски оптимизациони задачи, тежината во решавањето се состои во идентификација на оптимизациониот проблем и обликување на математичкиот модел. Затоа, во натамошниот текст тежиштето ќе биде посветено на формализацијата на целната функција и множеството на ограничувањата. Тоа ќе биде илустрирано со два примери за оптимизација на водостопански системи.

3.1.1. Решен пример број 3.1.1 - формализација на ММ за еден извор и два корисници

Во оваа задача се бара да се конструира математички модел за оптимизација на задачата на распределба на вода од еден извор на два корисници (слика 3.1). Нека се познати следниве големини: k - издашност на изворот, z_1 и z_2 - загуби на испорачаната вода од изворот кон корисниците, p_1 и p_2 - нормални потреби на водокорисниците, r - степен на редукција на нормалните потреби (за определување на минималните количини кои мора да бидат обезбедени), t - единечни трошоци на изворот за испорачана вода (трошоци за единица испорачана вода), и d_1 и d_2 - единечни добивки за добиена вода на водокорисниците.



Сл. 3.1. Распределба на вода од еден извор I на два корисници: K-1 и K-2

Потребно е да се определат оптималните вредности на испорачаната вода од изворот кон корисниците x_1 и x_2 , за усвоен критериум од економска природа, со кој се максимизираат нето добивките D_n од избраното управување со системот:

$$D_n = D_1 + D_2 - T = d_1 \cdot x_1' + d_2 \cdot x_2' - t \cdot (x_1 + x_2)$$

Доколку се применат следниве изрази за пристигнатите количини x_1' и x_2' до водокорисниците:

$$r \cdot p_1 \leq x_1' = (1 - z_1) \cdot x_1 \leq p_1$$

$$r \cdot p_2 \leq x_2' = (1 - z_2) \cdot x_2 \leq p_2$$

тогаш, со едноставни аритметички операции се добива комплетниот математички модел (со целна функција “J” и множество на ограничувања “L”), за идентификуваниот оптимизационен проблем:

$$J: \max_{\{x_1, x_2\}} f(x_1, x_2) = [d_1(1 - z_1) - t]x_1 + [d_2(1 - z_2) - t]x_2$$

$$L: \begin{cases} x_1 + x_2 \leq k \\ \frac{rp_1}{1 - z_1} \leq x_1 \leq \frac{p_1}{1 - z_1} \\ \frac{rp_2}{1 - z_2} \leq x_2 \leq \frac{p_2}{1 - z_2} \end{cases}$$

Во следнава табела се дадени резултатите за x_1 и x_2 , пресметани со опишаниот математички модел, за зададени влезни големина: k , z_1 , z_2 , p_1 , p_2 , r , t , d_1 и d_2 .

$k =$	$z_1 =$	$z_2 =$	$p_1 =$	$p_2 =$	$r =$	$t =$	$d_1 =$	$d_2 =$	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_1 + x_2 =$	$J =$
140	0.25	0.3	80	70	0.6	3	4.6	5	64	76	140	66.8

Со добиените резултати за x_1 и x_2 , мора да бидат исполнети следните контроли по однос на ограничувањата:

Контрола бр.1

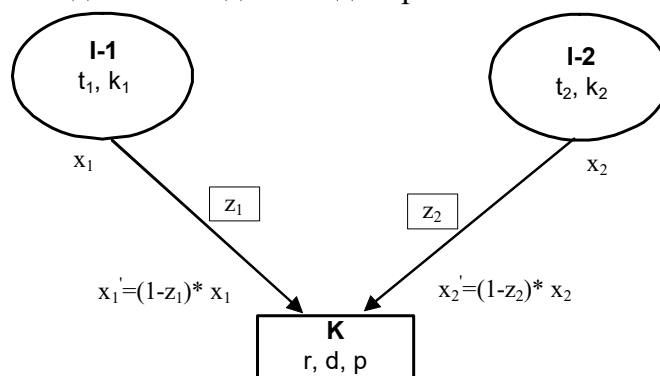
$x_1 + x_2 =$	140	$\leq$	$k =$	140
---------------	-----	--------	-------	-----

Контрола бр.2

rp_1	48	$\leq$	x_1'	48	$\leq$	$p_1 =$	80
rp_2	42	$\leq$	x_2'	53.2	$\leq$	$p_2 =$	70

3.1.2. Решен пример број 3.1.2 - формализација на ММ за два извори и еден водокорисник

Во оваа задача се бара да се конструира математички модел за оптимизација на задачата на водоснабдување на еден заеднички корисник од два извори (слика 3.2). Нека се познати следните големина: k_1 и k_2 - издашности на изворите, z_1 и z_2 - загуби на испорачаната вода од изворите кон корисникот, p - нормална потреба на водокорисникот, r - степен на редукција на нормалната потреба (или минимална количина која мора да биде обезбедена), t_1 и t_2 - единечни трошоци на изворите за испорачана вода (трошоци за единица испорачана вода), и d - единечни добивки за добиена вода на водокорисникот.



Сл. 3.2. Распределба на вода од два извори: I-1 и I-2 на еден корисник K

Потребно е да се определат оптималните вредности на испорачаната вода од изворите кон корисникот x_1 и x_2 , за усвоен критериум од економска природа, со кој се максимизираат нето добивките D_n од избраното управување со системот:

$$D_n = D - (T_1 + T_2) = d \cdot (x_1' + x_2') - (t_1 \cdot x_1 + t_2 \cdot x_2)$$

Доколку се примени следнава условна релација за пристигнатите количини x_1' и x_2' до водокорисниците:

$$r \cdot p \leq x_1' + x_2' = (1 - z_1) \cdot x_1 + (1 - z_2) \cdot x_2 \leq p$$

тогаш, со едноставни аритметички операции се добива комплетниот математички модел (со целна функција “J” и множество на ограничувања “L”), за идентификуваниот оптимизационен проблем:

$$J: \max_{\{x_1, x_2\}} f(x_1, x_2) = [d(1 - z_1) - t_1]x_1 + [d(1 - z_2) - t_2]x_2$$

$$L: \begin{cases} 0.0 \leq x_1 \leq k_1 \\ 0.0 \leq x_2 \leq k_2 \\ rp \leq (1 - z_1)x_1 + (1 - z_2)x_2 \leq p \end{cases}$$

Во следнава табела се дадени резултатите за x_1 и x_2 , пресметани со опишаниот математички модел, за зададени влезни големина: $k_1, k_2, t_1, t_2, z_1, z_2, p, r$, и d .

$k_1 =$	$k_2 =$	$t_1 =$	$t_2 =$	$z_1 =$	$z_2 =$	$p =$	$r =$	$d =$	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_1' + x_2' =$	$r \cdot p =$	$J =$
70	80	3	3.2	0.25	0.22	140	0.6	4.1	70	40.38	84	84	5.17

3.2. Линеарно програмирање

3.2.1. Задача на линеарното програмирање

Линеарното програмирање (ЛП) е метод на операционите истражувања за изнаоѓање на оптимално решение на проблеми каде сите релации помеѓу променливите (во целната функција и множеството на ограничувања и/или услови), се линеарни функции.

Математичкиот модел на задачата на линеарното програмирање, во развиен облик, се состои во следното:

- потребно е да се определи множеството од “ n ” непознати:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (3.4)$$

- во областа на дозволените решенија “ D ”, дефинирана со системот со “ m ” линеарни равенки и/или неравенки од множеството на ограничувањата “ L ”:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned} \quad (3.5)$$

- при што треба да бидат задоволени природните услови за ненегативност на непознатите големина “ P ”:

$$\{x_i \geq 0; i=1, n\} \quad (3.6)$$

- за кои целната функција, која е линеарна комбинација од непознатите:

$$F_{(X)} = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (3.7)$$

- достигнува екстремна (максимална или минимална) вредност:

$$J: \text{eks}_{\{X\}} F_{(X)} \quad (3.8)$$

- при што не се разликува постапката за максимизација и минимизација, бидејќи се постигнува за исто решение:

$$J: \max_{\{X\}} F_{(X)} = -\min_{\{X\}} [-F_{(X)}] \quad (3.9)$$

Математичкиот модел на задачата на ЛП може да се претстави и во матрична форма:

- целна функција

$$F_{(X)} = \{c_j\}_{1..n} \{x_j\}_{n..1} \quad (3.10)$$

- множество на ограничувања

$$[a_{ij}]_{m \times n} \{x_j\}_{n \times 1} \leq \{b_i\}_{m \times 1} \quad (3.11)$$

- каде што, $\{c_j\}_{1 \times n}$ е “n” димензионален вектор-ред на коефициенти пред непознатите во целната функција:

$$\{c_j\}_{1 \times n} = \{c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n\} \quad (3.12)$$

- $\{x_j\}_{n \times 1}$ е “n” димензионален вектор-колона на непознатите променливи:

$$\{x_j\}_{n \times 1} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

- $[a_{ij}]_{m \times n}$ е матрица со “m” редови и “n” колони на коефициенти пред непознатите во множеството на ограничувањата:

$$[a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

- $\{b_i\}_{m \times 1}$ е “m” димензионален вектор-колона на слободни членови во множеството на ограничувањата:

$$\{b_i\}_{m \times 1} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

- при што важи:

$$J: \max_{\{x\}} \{c\} \{x\} = - \min_{\{x\}} \{-c\} \{x\} \quad (3.16)$$

Во математичката и техничката литература, задачата на ЛП често пати се сретнува во **кондензирана** форма, при што се опишува со следниве релации:

$$\begin{aligned} J: \quad & \max_{\{x\}} F_{(x)} = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \\ L: \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \begin{cases} \leq \\ \equiv \\ \geq \end{cases} b_i; \quad i = 1, m \\ P: \quad & x_j \geq 0; \quad j = 1, n \end{aligned} \quad (3.17)$$

Множеството вредности “X” кое го задоволува множеството на ограничувања “L” претставува решение на проблемот на ЛП. Решението на ЛП кое го задоволува условот за ненегативност “P” претставува дозволено решение X^{doz} . Дозволеното решение кое ја екстремизира целната функција $F_{(x)}$ е оптимално решение X^{opt} . Да се реши проблемот на ЛП значи од бескрајно многу

дозволените решенија да се изнајде тоа решение (или тие решенија), кое ја екстремизира целната функција.

Променливите $\{x_j, j=1,n\}$ може да бидат континуирани големини, но во реалните проблеми на ЛП најчесто е потребно да бидат целобројни вредности. Кога вредностите на променливите се доволно големи во однос на единицата со која се изразуваат, тогаш претпоставката за континуираност на променливите е оправдана и оптималното решение се заокружува на најблиската целобројна вредност. Доколку претходниот услов по однос на единицата со која се изразуваат не е исполнет (на пример, проблем за определување на број на произведени турбини), тогаш се поставува и условот за целобројност на променливите, со што се добива методот на целобројно линеарно програмирање. Доколку е зададен условот променливите да добиваат само вредности “0” или “1” (на пример, проблем дали $i^{тата}$ акумулација треба се содржи во сложениот водостопански систем, каде “0” значи дека се отфрла, а “1” дека се вклучува), таквиот метод се нарекува 0-1 (или комбинаторно) програмирање. Поради условот за дискретност на вредностите на променливите, целобројното и комбинаторното програмирање (иако нивните математички модели содржат само линеарни форми), се систематизираат во областа на нелинеарното програмирање.

Генерално, сложените водостопански системи не се линеарни, бидејќи повеќето хидраулички и хидроенергетски релации за опис на математичкиот модел на системот се производ на координатите на состојбите и управувањата, со што водостопанските проблеми се карактеризираат со изразита нелинеарност. Директната примена на методот на ЛП во задачите за оптимизација на водостопанските системи е ограничена на следните случаи:

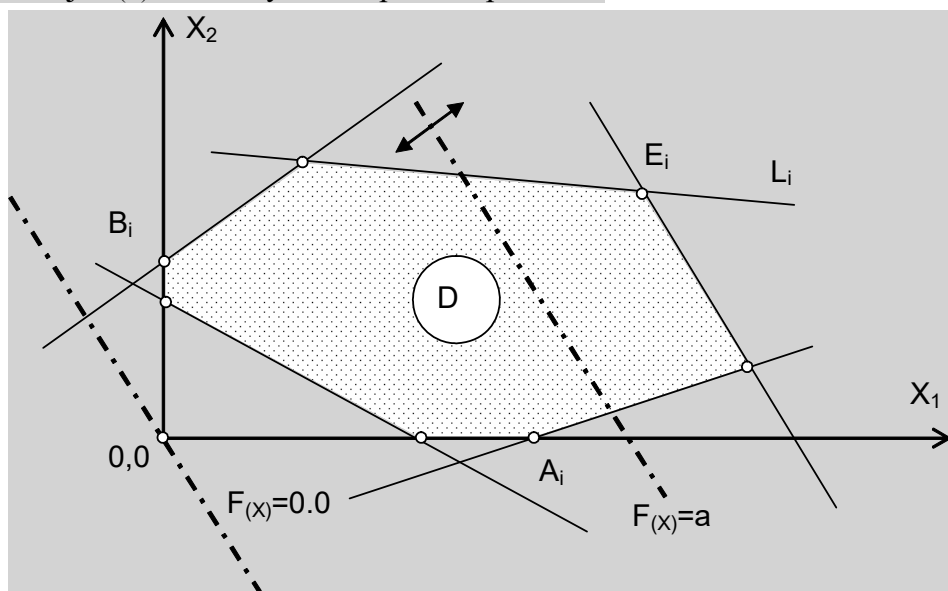
- (а) ВСС каде не е вклучена хидроенергетиката и економската ефективност се определува врз основа на испорачаната количина на вода за водокорисниците и единичните цени;
- (б) ВСС без хидроцентрали, каде нелинеарната економска функција се апроксимира со сегментна линеарна зависност, и
- (в) сложен каскаден ВСС каде се занемарува промената на работниот притисок при производството на снага и енергија доколку е прифатлива апроксимацијата за протечни хидроцентрали.

3.2.2. Методи за решавање на проблеми на линеарното програмирање

Доколку проблемот на линеарното програмирање содржи две променливи x_1 и x_2 , тогаш може да се примени **графичката метода**. Во тој случај сите разгледувања се извршуваат во дводимензионален простор, односно X_1Ox_2 рамнина. Условите (или равенките) се претставуваат со прави, а ограничувањата (или неравенките) се претставуваат со полурамнини во првиот квадрант од координатниот систем, поради природниот услов за ненегативност на променливите.

Со истражувањето на множеството на ограничувањата во првиот квадрант (слика 3.3) се забележува дека областа на дозволените решенија “D” е конвексно множество, односно конвексен полиедар во X_1Ox_2 рамнината. Линеарната форма

на целната функција ($F(x) = a$) претставува семејство на паралелни прави со фиксни вредности. Така на пример, за $F(x) = 0.0$ правата на целната функција минува низ координатниот почеток. При барање на максимум на критериумската функција правата $F(x)$ се поместува паралелно на самата себе во смер на зголемување на вредноста на целната функција, а при барање на минимум во смер на смалување на вредноста на целната функција. Решението на проблемот се состои во одредување на онаа права, која со множеството на дозволените решенија “D” има барем една заедничка точка, а при тоа, линеарната комбинација $F(x)$ достигнува екстремна вредност.



Сл. 3.3. Конвексен полиедар “D” во X_1Ox_2 рамнина

Графичката метода е значајна по тоа што едноставно и визуелно укажува на сите својства на проблемот на линеарното програмирање, кои се основа за сите аналитички методи:

- ✓ множеството на дозволени решенија формира конвексна област “D”;
- ✓ оптималното решение се наоѓа на една (или повеќе) екстремни точки (темиња на конвексниот полиедар) E_i од областа “D”;
- ✓ секоја област “D” има конечен број екстремни точки E_i ;
- ✓ екстремните точки на конвексната област претставуваат базни дозволени решенија;
- ✓ не мора да се испитуваат сите екстремни точки за да се дојде до решение на задачата на ЛП.

Кај алгебарската интерпретација на проблемот на ЛП треба да се истакне дека не постои метода која би овозможила изнаоѓање на оптимално решение во еден чекор, па затоа сите методи кои се применуваат во пракса се од итеративен карактер. Поаѓајќи од формулацијата на задачата на ЛП би требало да се најдат сите базни решенија и со пребарување да се определи она дозволено решение кое ја екстремизира целната функција. Бидејќи бројот на базни решенија е конечен, ова е теоретски можно. Меѓутоа, практично оваа процедура е крајно нерационална, бидејќи бројот на базните решенија многу брзо расте со порастот

на бројот на променливите “n”. Така, за проблем на ЛП со “n” променливи и “m” ограничувања, бројот на базните решенија N_{BR} (за $n > m$) изнесува:

$$N_{BR} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \quad (3.18)$$

Тоа значи - да се решат N_{BR} системи од “m” равенки (со “n” непознати), да се определи N_{BR} пати вредноста на целната функција, па со пребарување да се изнајде екстремната (оптималната) вредност на истата.

Со итеративните методи се избегнува решавањето на голем број на системи со линеарни равенки. Најуниверзална итеративна метода е **симплекс методата**, развиена од американскиот научник George Dantzig⁸ (Џорџ Данциг) во 1947. година. За да може да се примени симплекс методата изворниот проблем на ЛП треба да се преведи во стандарден облик. За таа цел, во секоја од неравенките (од множеството на ограничувањата), се додава по една дополнителна (или израмнителна) променлива и истите се трансформираат во равенки. Ако во изворниот модел на ЛП има “m” неравенки со “n” променливи, тогаш во стандардниот модел на ЛП има “m” равенки со $n+m$ променливи. Дополнителните променливи учествуваат и во целната функција, но со коефициенти еднакви на нула $c_j = 0$, така што не влијаат врз вредноста на целната функција. Ненултите коефициенти пред дополнителните променливи во множеството на ограничувањата имаат вредност $a_{ij} = +1$ ако i -тата неравенка (од изворниот модел) е со услов за помало $\leq$, а за неравенка со услов за поголемо $\geq$ одговара вредност $a_{ij} = -1$. Ако задачата на ЛП во изворен облик е зададена со **релацијата** 3.17, тогаш математичкиот модел на задачата на ЛП во стандарден облик (во кондензирана форма), за да биде применлива симплекс методата, е следниов:

$$\begin{aligned} J: & \text{eks} F_{(X)} = \sum_{j=1}^{n+m} c_j \cdot x_j; \quad \forall (j = n+1, n+m) \Rightarrow c_j = 0 \\ L: & \sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} \cdot x_j = b_i; \quad i = 1, m; \quad \forall (j = n+1, n+m) \Rightarrow a_{ij} = \begin{cases} \pm 1 \Leftarrow (i-1+m = j) \\ 0 \Leftarrow (i-1+m \neq j) \end{cases} \\ P: & x_j \geq 0.0; \quad j = 1, n+m \end{aligned} \quad (3.19)$$

Движењето од почетното до оптималното решение со симплекс методата се извршува по должината на една ивица од конвексниот полиедар на дозволените решенија. Оваа метода за почетно решение го зема решението каде вредностите на сите структурни (реални) променливи се еднакви на нула $\{x_j=0.0; j=1,n\}$, а вредностите на дополнителните (вештачки) променливи се еднакви на големините на слободните членови од множеството на ограничувањата $\{x_j=b_i; j=n+1,n+m; i=1,m\}$. Во секоја екстремна точка методот „известува“ дали е тоа оптималното решение, и ако не е, во која следна екстремна точка треба да се оди.

⁸ George Bernard Dantzig (November 8, 1914 – May 13, 2005) was an American mathematician, and the Professor Emeritus of Transportation Sciences and Professor of Operations Research and of Computer Science at Stanford. Dantzig is known for his development of the simplex algorithm, an algorithm for solving linear programming problems, and his work with linear programming.

Симплекс методата во конечен број итерации (зашто постои конечен број на екстремни точки), доведува до оптимално решение или известува дека постои неограничено решение.

Во одредени случаи математичкиот модел на задачата на ЛП не може да се искористи во алгоритмот на симплекс методот за изнаоѓање на оптималното решение, без разлика на коректната поставеност. Во таков случај е потребно да се преформулира примарната задача на ЛП (примар) во **дуална задача** на ЛП (дуал), со што во најголем број случаи се овозможува решавање на проблемот на ЛП. Ако е зададен математичкиот модел на примарот за максимизација на $F(x)$, тогаш математичкиот модел за минимизација на дуалот $H(y)$ се изразува со релациите внесени во [табела 3.1](#).

Таб. 3.1. Математички модели на примар и дуал

математички модел	примар	дуал
J: целна функција	$\max F_{(X)} = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$	$\min H_{(Y)} = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$
L: множество на ограничувања	$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$ $\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$ $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$	$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1$ $a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2$ $\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$ $a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n$
P: услов за ненегативност	$x_j \geq 0.0; j=1,n$	$y_i \geq 0.0; i=1,m$

Помеѓу овие два модели постои инверзија во поглед на барањата:

1. ако во примарот се бара максимум на целната функција, тогаш во дуалот се бара минимум;
2. колку што примарот има променливи, толку дуалот има ограничувања;
3. колку што примарот има ограничувања, толку дуалот има променливи;
4. слободните членови во ограничувањата на примарот стануваат коефициенти пред непознатите во целната функција на дуалот;
5. коефициенти пред непознатите во целната функција на примарот стануваат слободни членови во ограничувањата на дуалот;
6. смерот на неравенките во ограничувањата на примарот е спротивен на смерот на неравенките кај дуалот;
7. матрицата на множеството на ограничувањата на дуалот е транспонирана матрица на множеството на ограничувања на примарот.

Основната теорема на дуалността е искажана во следнава равенка:

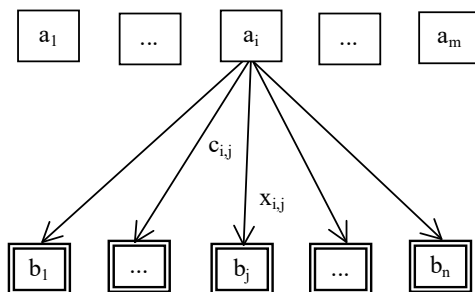
$$\max_{F(X)} = \{C\} \{X^{opt}\} = \{B\} \{Y^{opt}\} = \min H(Y) \quad (3.20)$$

Според MINMAX теоремата: „Ако една од задачите (примар или дуал) има решение, тогаш и другата задача има решение, при што максимумот на примарот е еднаков на минимумот на дуалот“. Преминот на решавање на дуалот наместо примарот е препорачлив секогаш кога во примарот бројот на ограничувањата е поголем од бројот на променливите $m > n$. На тој начин се поедноставува изнаоѓањето на инверзната матрица, бидејќи се смалува редот на матрицата од “ m ” на “ n ”.

3.3. Транспортен проблем

Транспортниот проблем (ТП) зазема исклучително место во методите од операционите истражувања. ТП е специјален случај на линеарното програмирање. Овој метод го добил името „транспортен проблем“ бидејќи бил развиен за проблеми за изнаоѓање на оптимален транспорт. Во изучувањето на проблемот на транспортот најзначајни се резултатите презентирани во трудовите на рускиот научник Канторович⁹ во 1939 година и американскиот научник Hitchcock¹⁰ (Хичкок) во 1941 година. Специфичноста на ТП во однос на ЛП се согледува во упростувањето на коефициентите пред непознатите во множеството на ограничувањата, кои може да бидат или “1” или “0”. Покрај тоа што со симплекс методата може да се решаваат транспортни проблеми, нивната специфичност довела до создавање на посебни транспортни методи на ЛП.

Математичката формализација на класичниот ТП може да се објасни со задачата за изнаоѓање на најекономичен транспорт на некој производ од “ m ” пунктови за производство или магационирање (во натамошниот текст производители), до “ n ” пунктови на потрошувачка (во натамошниот текст потрошувачи), [слика 3.4](#). Ако се познати: $\{a_i; i=1,m\}$ расположливите количини за секој производител, $\{b_j; j=1,n\}$ потребните количини за секој потрошувач и $\{c_{ij}; i=1,m; j=1,n\}$ единечните цени или чинењето на транспортот на единица производ од $i^{\text{ти}}$ производител до $j^{\text{ти}}$ потрошувач, тогаш задачата се сведува на определување на $\{x_{ij}; i=1,m; j=1,n\}$ количините на транспортирани производи од $i^{\text{ти}}$ производител до $j^{\text{ти}}$ потрошувач, при што мора да биде задоволен условот за ненегативност на непознатите $\{x_{ij} \geq 0.0; i=1,m; j=1,n\}$.



Сл. 3.4. Шема на транспортен проблем

Во класичниот ТП се подразбира постоење на врска меѓу секој пар $(i=1,m; j=1,n)$. Во задачите каде не постои врска меѓу некој пар (i,j) се воведува фиктивна врска со единични трошоци за транспорт $c_{ij} = \infty$ (бескрајно големи),

⁹ Leonid Vitaliyevich Kantorovich (Russian: Леонид Витальевич Канторович) (19 January 1912, Saint Petersburg – 7 April 1986, Moscow) was a Soviet/Russian mathematician and economist, known for his theory and development of techniques for the optimal allocation of resources. He was the winner of the Nobel Prize in Economics in 1975 and the only winner of this prize from the USSR.

¹⁰ Frank Lauren Hitchcock (1875–1957) was an American mathematician and physicist notable for vector analysis. He formulated the transportation problem in 1941. He was also an expert in mathematical chemistry and quaternions. In mathematics, the quaternions are a number system that extends the complex numbers.

така што ќе се добие количина на транспорт еднаква на нула $x_{ij} = 0.0$. Критериумот за оптимизација, бидејќи се анализираат трошоците, претставува минимизација на целната функција $F(x)$ по однос на множеството решенија $\{X\}$.

$$J: \min_{\{X\}} F_{(X)} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n (c_{ij} \cdot x_{ij}) \right) \quad (3.21)$$

Во зависност од ограничувањата се разликуваат следните три модели на транспортниот проблем: (1) затворен, (2) отворен, со понуда поголема или помала од потрошувачката, и (3) со ограничена пропустливост.

3.3.1. Затворен модел на транспортен проблем

Ако постои билансна рамнотежа помеѓу: производството, транспортот и побарувачката, односно ако е задоволено следното равенство:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (3.22)$$

тогаш множеството на ограничувања се изразува со следниве равенки (услови):

- за производните пунктови:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i; \quad i = 1, m \quad (3.23)$$

- за потрошувачките пунктови:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j; \quad j = 1, n \quad (3.24)$$

а математичкиот модел се нарекува затворен модел на транспортниот проблем.

3.3.2. Отворен модел на транспортен проблем

Доколку не постои рамнотежа меѓу производството и потрошувачката, односно ако е зададена релацијата:

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j \quad (3.25)$$

тогаш се работи за отворен модел на транспортниот проблем. Во отворениот модел на ТП се разликуваат две задачи (1) понуда поголема од побарувачка и (2) понуда помала од побарувачка. Отворениот ТП е чест пример во водостопанското планирање, каде што од “m” извори се снабдуваат “n” водокорисници, а при тоа се можни два случаи: (1) вишок на вода, односно капацитетот на изворите да е поголем од потребите на потрошувачите, и (2) недостаток на вода, односно потрошувачите да имаат поголеми потреби од капацитетот на изворите.

3.3.2.1. Отворен модел на ТП, задача - понуда поголема од побарувачка

Ако производството е поголемо од побарувачката, односно ако е исполнета следнава неравенка:

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j \quad (3.26)$$

тогаш множеството на ограничувања се изразува со следните релации:

- за производните пунктови:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i; \quad i = 1, m \quad (3.27)$$

- за потрошувачките пунктови се користи [релацијата 3.24](#).

Овај отворен модел на ТП се сведува на затворен модел со воведување на дополнителен (фиктивен) потрошувачки пункт, чија потреба изнесува:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j \quad (3.28)$$

при што, за да не дојде до промена на вредноста на целната функција, се зема дека цените за единечен транспорт од било кој производител до фиктивниот потрошувач се еднакви на нула:

$$c_{i,n+1} = 0.0; \quad i=1, m \quad (3.29)$$

После ваквото проширување на отворениот модел, истиот се сведува на затворен математички модел на ТП:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j \quad (3.30)$$

Количината на ресурс, која според математичкото решение некој производител ја испорачува до фиктивниот потрошувач, всушност претставува количина што ќе остане кај тој произведен пункт. Значи, со наоѓање на оптималното решение на проширениот модел (кое е истовремено и решение на отворениот модел), се определуваат:

$x_{i,j}; i=1, m; j=1, n$ количини на ресурс кои ќе се транспортираат од $i^{\text{ти}}$ производител до $j^{\text{ти}}$ потрошувач, и

$x_{i,n+1}; i=1, m$ количини на ресурс кои ќе останат кај $i^{\text{ти}}$ производител.

3.3.2.2. Отворен модел на ТП, задача - понуда помала од побарувачка

Ако производството е помало од побарувачката, односно ако е исполнета следната неравенка:

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j \quad (3.31)$$

тогаш множеството на ограничувања се изразува со следните релации:

- за производните пунктови се користи [релацијата 3.23](#).

- за потрошувачките пунктови:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j; \quad j = 1, n \quad (3.32)$$

Овај отворен модел на ТП се сведува на затворен модел со воведување на дополнителен (фиктивен) произведен пункт, чиј капацитет изнесува:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i \quad (3.33)$$

при што, за да не дојде до промена на вредноста на целната функција, се зема дека цените за единечен транспорт од фиктивниот производител до било кој потрошувач се еднакви на нула:

$$c_{m+1,j} = 0.0; \quad j=1,n \quad (3.34)$$

После ова проширување на отворениот модел истиот се сведува на затворен математички модел на ТП:

$$\sum_{i=1}^{m+1} a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (3.35)$$

Количината на ресурс, која според математичкото решение некој потрошувач ја добива од фиктивниот производител, всушност претставува количина која ќе недостасува кај тој потрошувач. Значи, со наоѓање на оптималното решение на проширениот модел (кое е истовремено и решение на отворениот модел) се определуваат:

$x_{i,j}; i=1,m; j=1,n$ количини на ресурс кои ќе се транспортираат од i^{th} производител до j^{th} потрошувач, и

$x_{m+1,j}; j=1,n$ количини на ресурс кои ќе недостасуваат кај j^{th} потрошувач.

3.3.3. Транспортен модел со ограничени пропустливи способности

Доколку постојат дополнителни ограничувања, поради максималната пропустна способност на транспортната мрежа, тогаш покрај ограничувањата во ТП зависно од отворениот или затворениот математички модел, мора да се воведат и следните ограничувања:

$$0.0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}; \quad i=1,m; j=1,n \quad (3.36)$$

каде што d_{ij} е максималната пропустна способност од i^{th} производител до j^{th} потрошувач.

Задачата на ТП со ограничени пропустливи способности има решение само доколку се задоволени следните услови:

- сумарната пропустливост од i^{th} от производител кон n^{th} потрошувачи да биде поголема од неговиот капацитет:

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} \geq a_i; \quad i = 1,m \quad (3.37)$$

- сумарната пропустливост од m^{th} производители кон j^{th} от потрошувач да биде поголема од неговата потреба:

$$\sum_{i=1}^m d_{ij} \geq b_j; \quad j = 1,n \quad (3.38)$$

* * *

Покрај задачите за избор на најповолна варијанта на транспорт во однос на одредена транспортна мрежа и транспортни средства, развиени се и други задачи кои се варијанти на транспортниот проблем: (1) избор на извршители на активности, (2) задача на распределба, (3) оптимизација на патен, железнички или авионски транспорт, (4) избор на локации, (5) минимизација на времето потребно за транспорт, итн. Методот на ТП може успешно да се примени во решавањето на водостопански проблеми каде има повеќе извори (аккумуляции,

каптажи, зафати, бунари) и повеќе локации на потрошувачи на вода (водоснабдување, наводнување, и сл.). Кај задачите на оптимална анализа, проблемот се сведува на минимизација на експлоатационите трошоци при дистрибуцијата на водата низ постојаните водоспроводници од изворите кон потрошувачите. Задачата на оптимална синтеза е далеку посложена и се решава во следните нивои: (а) изработка на варијанти со различни капацитети на изворите и максимални пропустливости на цевководи или канали, со кои се задоволуваат потрошувачите и процена на експлоатационите трошоци за транспорт на единица волумен вода, од секој извор до секој потрошувач и (б) итеративна примена на моделот на ТП за да се изнајде најповолната структура на водостопанскиот систем при оптимален транспорт на водниот ресурс од изворите до потрошувачите.

3.4. Нелинеарно програмирање

Ако барем една од релациите во математичкиот модел (целната функција од “n” променливи и множеството на “m” ограничувања и/или услови, каде се содржани непознатите променливи), е нелинеарна функција, тогаш се работи за нелинеарно програмирање (НП). НП може да се формализира, во кондензирана форма, на следниов начин:

$$\begin{aligned} J: & \text{eks} F_{(X)} = F_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} \\ L: & g_{i(X)} = g_{i(x_1, x_2, \dots, x_n)} \begin{cases} \leq \\ \equiv \\ \geq \end{cases} 0.0; \quad i = 1, m \\ P: & x_j \geq 0.0; \quad j = 1, n \end{aligned} \quad (3.39)$$

што значи: да се одредат вредностите на непознатите $\{x_j; j=1, n\}$ за кои критериумската функција $F_{(X)}$ има екстремна вредност (минимум или максимум), а при тоа да се задоволени сите “m” релации од множеството на ограничувања “L” и природните услови за ненегативност “P”.

3.4.1. Задачи на нелинеарно програмирање

Формалната класификација на задачите на НП е направена врз основа на математичката форма на целната функција $F_{(X)}$ и функциите во множеството на ограничувањата $g_{i(X)}$. На тој начин може да се систематизираат следниве задачи на НП:

1. Задача на безусловна оптимизација, доколку не постојат релациите од множеството на ограничувањата.
2. Задача со линеарни ограничувања, ако множеството на ограничувања е зададено со линеарни релации:

$$L: \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \begin{cases} \leq \\ \equiv \\ \geq \end{cases} b_i; \quad i = 1, m \quad (3.40)$$

3. Задача на квадратно програмирање, кога целната функција има квадратна форма:

$$F_{(X)} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} x_j x_k + \sum_{j=1}^n d_j x_j \quad (3.41)$$

4. Задача на конвексно програмирање, ако целната функција е конвексна и множеството на дозволени решенија е конвексно. Функцијата $F_{(X)}$ е конвексна доколку измеѓу било кои две точки x_a и x_b има вредности кои се помали од вредностите на праволинискиот сегмент кој ги спојува $F_{(x_a)}$ и $F_{(x_b)}$.
5. Задача на сепарабилно програмирање, ако целната функција има сепарабилен карактер (или ако со одредени трансформации оригиналната функција може да сведи на сепарабилна):

$$F_{(X)} = \sum_{j=1}^n F_{j(x_j)} \quad (3.42)$$

6. Задача на геометриско програмирање, ако математичкиот модел е изразен со следните релации:

$$\begin{aligned} J: \quad \min_{\{X\}} F_{(X)} &= \sum_{k=1}^N c_k \prod_{j=1}^n x_j^{a_{kj}} \\ L: \quad \sum_{k=1}^N g_{ki} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{kj}} &\leq 1; \quad i = 1, m \\ P: \quad x_j &\geq 0.0; \quad j = 1, n \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$c_k > 0; \quad a_{kj} \in R; \quad g_{ki} \leq 0; \quad k = 1, N; \quad j = 1, n \quad (3.44)$$

7. Задача на целобројно програмирање, ако непознатите $\{x_j; j=1, n\}$ може да имаат само целобројни вредности.
8. Задача на комбинаторно програмирање, ако непознатите $\{x_j; j=1, n\}$ може да имаат само вредности 0 или 1.
9. Динамичка задача, ако функциите се претставени со функционали (составени од повеќе функции). Непознатите во оваа задача се функции $x_{(t)}$ дефинирани во некој ограничен, затворен интервал $t \in \{0, T\}$. Ако “ t ” е време, тогаш станува збор за динамичка задача на оптимизација. Математичкиот модел на динамичката задача е следен:

$$\begin{aligned} J: \quad \min_{X(t)} F_{(X)} &= F_{(X(t))} \\ L: \quad g_{i(X(t))} &\begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} 0.0; \quad i = 1, m \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.4.2. Методи за решавање на задачите на нелинеарно програмирање

Задачите на НП не може да се решаваат со некоја универзална метода (како симплекс методата за решавање на проблемите на ЛП), туку за секој конкретен случај потребна е нова метода или прилагодување на некоја од постојните, зависно од математичкиот модел и димензијата и карактерот на нелинеарноста. Во голем број случаи дури и не постои прикладна метода врз чија основа би се нашло оптимално решение на формулираната задача на НП. Затоа во математичкото програмирање во областа на НП се прават обемни истражувања

за систематизација и селекција на нелинеарните управувачки задачи и пополнување на методологиите за нивно решавање. Постојните методи, со чија помош може да се решат некои задачи на НП, почнале да се развиваат од 1960^{та} година и може да се класифицираат во следните групи на методи:

1. Методи на безусловна оптимизација:

- Одредување на стационарни точки. Со претпоставка дека е познат аналитичкиот облик на $F(x)$ и дека таа е диференцијабилна, тогаш со решавање на системот равенки:

$$\partial F / \partial x_j = 0; \quad j=1, n \quad (3.46)$$

се добива решение X^* кое е стационарна точка на функцијата $F(x)$. Ако целната функција е конвексна (или конкавна), тогаш $F(x^*)$ е минимум (или максимум) на оптимизациониот проблем без ограничувања.

- Метода на Powell. Со оваа метода може да се пресмета локалниот минимум на целната функција без определување на изводите.
- Метода на променлива метрика. Оваа метода ги обединува најдобрите својства на Cauchy-евата метода на најстрмно опаѓање и Newton-овата метода.

2. Методи со сведување на задачата со ограничувања на задача на безусловна оптимизација

- Метода со елиминација на променливите. Оваа метода може да се примени ако е задоволен условот $n > m$ (бројот на непознати да биде поголем од бројот на равенките во множеството на ограничувањата - составено само од равенки). Со замена на “ m ” променливи во целната функција се добива нова целна функција со $(n-m)$ променливи без ограничувања.
- Метода на Лагранж-ови множители (Lagrange-ови мултипликатори) од 1788^{та} година. Со овој метод се обезбедува изнаоѓање на екстрем на целната функција, ако множеството на ограничувања е зададено со равенки и функциите во математичкиот модел ги задоволуваат условите за конвексност.
- Метода на седлеста точка или теорема на Кан и Такер (Kuhn and Tucker). Оваа метода претставува проширување на методата на Lagrange-ови множители и обезбедува определување на екстремна вредност на целната функција и доколку во множеството на ограничувањата има неравенки.
- Метода на казнени функции.

3. Методи на квадратно програмирање

4. Методи на конвексно програмирање

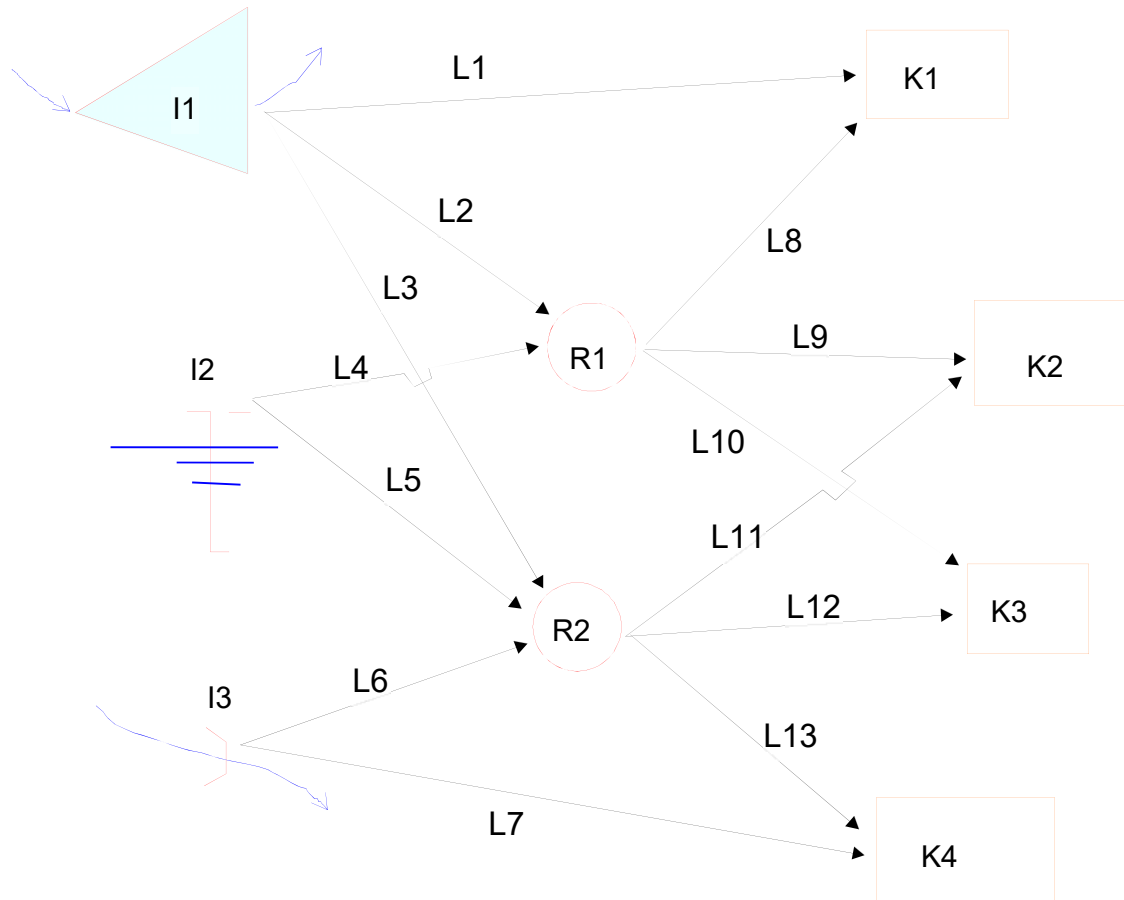
- Градиентна метода. Оваа метода претставува системско пребарување и наоѓање на решение во итеративна постапка за задачи без ограничувања.
- Параметарска метода.

5. Методи на сепарабилно програмирање

- Динамичко програмирање.
- Линеарна апроксимација на функциите во математичкиот модел.

3.5. Задача – оптимизација на регионален водоснабдителен систем со методот на ЛП

За усвоената конфигурација на регионалниот водоснабдителен систем за обезбедување на сурова вода на водокорисниците (слика 3.5), треба да се определат оптималните физички параметри на објектите што го сочинуваат системот. Регионалниот водоснабдителен систем, за кој е потребно да се формализира математичкиот модел на линеарното програмирање (целна функција и множество на ограничувања), е составен од: три извори I_i на вода (акумулација, бунари и каптажа), два резервоари R_i , тринаесет можни потези L_i за транспорт на потребните количини на вода, и четири водокорисници K_i .



Сл. 3.5. Шема на регионален водоснабдителен систем за обезбедување сурова вода

Ознаки кои се усвоени во предметнава оптимизациона задача се:

I_i издашност на $i^{\text{тиот}}$ извор (акумулација, бунари, каптажа),

R_i потреби (гранични максимални) на $i^{\text{тиот}}$ корисник,

R_d степен на редукција, со кој се добиваат граничните минимални потреби на водокорисниците во оваа оптимизациона задача,

L_i капацитет на $i^{\text{тиот}}$ потез,

Z_i степен на загуби на $i^{\text{тиот}}$ потез,

T_i единечни трошоци за испорачана вода од $i^{\text{тиот}}$ извор,

C_i единечни трошоци за осредното протекување X_i^{SR} низ $i^{\text{тиот}}$ потез, и

D_i единечни добивки за добиена вода на $i^{\text{тиот}}$ корисник;

Влезните податоци, потребни за оптимизација на водоснабдителниот систем се дадени во следната табела:

Таб. 3.2. Влезни податоци за регионалниот водоснабдителен систем

Vlezní podací			Rd = 0.85				
rb	I[l/s]	T[€/l/s]	P[l/s]	D[€/l/s]	L[l/s]	C[€/l/s]	Z [-]
1	160.0	70.0	60.0	98.0	60.0	6.0	0.10
2	80.0	45.0	50.0	95.0	50.0	2.6	0.15
3	40.0	35.0	70.0	97.0	65.0	2.7	0.11
4			70.0	99.0	45.0	9.0	0.12
5					45.0	9.5	0.08
6					35.0	3.5	0.09
7					55.0	9.0	0.12
8					40.0	5.0	0.14
9					35.0	5.1	0.16
10					35.0	5.3	0.11
11					40.0	5.0	0.10
12					35.0	4.8	0.11
13					50.0	4.3	0.16
sum=	280.0		250.0				

Ако со X_i го означиме протекувањето во почетокот на $i^{\text{тиот}}$ потез, тогаш

$X_i^K = (1 - Z_i) * X_i$ е протекувањето на крајот од $i^{\text{тиот}}$ потез, и

$X_i^S = (X_i + X_i^K) / 2$ е средното протекувањето низ $i^{\text{тиот}}$ потез.

* * *

Оптимизациониот проблем се состои во определување на непознатите X_i ($i=1,13$) за кои се максимизираат нето добивките на регионалниот водоснабдителен систем, при што распределените протекувања до водокорисниците треба да бидат во границите помеѓу редуцираните и нормалните потреби.

* * *

Решението на поставената оптимизациона задача се состои во следните чекори:

(1) АНАЛИТИЧКА ФОРМАЛИЗАЦИЈА НА МАТЕМАТИЧКИОТ МОДЕЛ

Математичкиот модел на оптимизационата задача се состои од аналитичка формализација на: (а) критериумот на оптимизацијата и (б) ограничувањата на варијаблите. Во оваа задача може да се издвојат добивки и трошоци, затоа целната функција на оптимизацијата е определување на нето добивките, како разлика меѓу сумарните добивки и сумарните трошоци. Критериум на оптимизација во оваа управувачка задача е максимизација на нето добивките, по

однос на непознатите X_i ($i=1,13$). Аналитичката форма на критериумот на оптимизацијата ќе биде:

$$\text{MAX } \{D_n\}_{X_i (i=1,13)} \quad (3.46)$$

Нето добивките D_n , согласно со усвоената конфигурација на системот, се определуваат со равенките дадени во [табела 3.3](#).

Таб. 3.3. Преглед на аналитичките форми за пресметка на целната функција

РБ	математичка форма	коментар
1	$D_n = \text{sumDK} - \text{sumTI} - \text{sumTC}$	нето добивки
2	$\text{sumDK} = DK1 + DK2 + DK3 + DK4$	добивки од корисници
3	$DK1 = D1 * (XK1 + XK8)$	корисник 1
4	$DK2 = D2 * (XK9 + XK11)$	корисник 2
5	$DK3 = D3 * (XK10 + XK12)$	корисник 3
6	$DK4 = D4 * (XK7 + XK13)$	корисник 4
7	$\text{sumTI} = TI1 + TI2 + TI3$	трошоци на извори
8	$TI1 = T1 * (X1 + X2 + X3)$	извор 1
9	$TI2 = T2 * (X4 + X5)$	извор 2
10	$TI3 = T3 * (X6 + X7)$	извор 3
11	$\text{sumTC} = \text{sum}(i=1,13) \{C_i * XSi\}$	трошоци на 13 цевководи

Ограничувањата и условите што треба да бидат задоволени од варијабилите, како равенки и неравенки, се систематизирани во [табела 3.4](#).

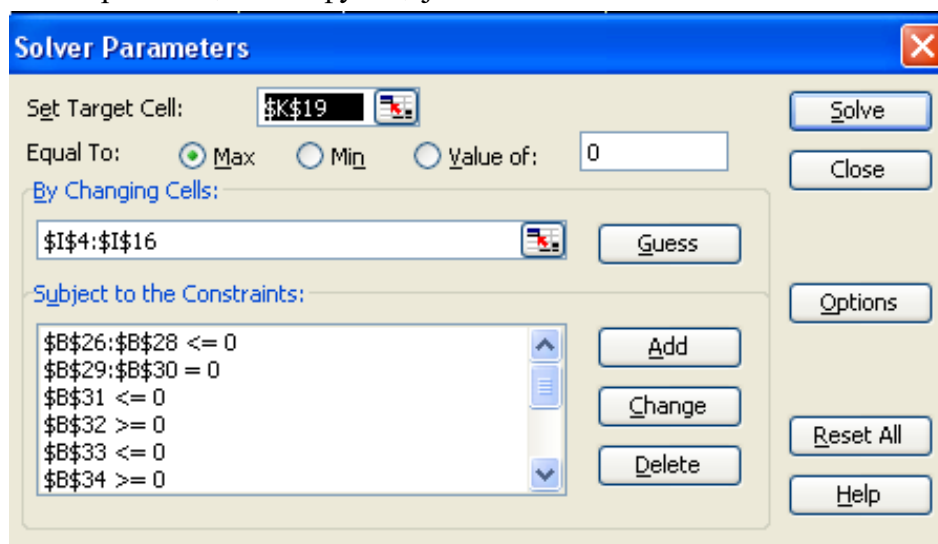
Таб. 3.4. Преглед на аналитичките форми за проверка на ограничувањата

рб	математичка форма	коментар
1	$I1 \Rightarrow X1 + X2 + X3$	извор 1
2	$I2 \Rightarrow X4 + X5$	извор 2
3	$I3 \Rightarrow X6 + X7$	извор 3
4	$XK2 + XK4 = X8 + X9 + X10$	резервоар 1
5	$XK3 + XK5 + XK6 = X11 + X12 + X13$	резервоар 2
6	$P1 \Rightarrow K1, \text{ kade } K1 = XK1 + XK8$	корисник 1
7	$R1 \leq K1, \text{ kade } R1 = Rd * P1$	корисник 1
8	$P2 \Rightarrow K2, \text{ kade } K2 = XK9 + XK11$	корисник 2
9	$R2 \leq K2, \text{ kade } R2 = Rd * P2$	корисник 2
10	$P3 \Rightarrow K3, \text{ kade } K3 = XK10 + XK12$	корисник 3
11	$R3 \leq K3, \text{ kade } R3 = Rd * P3$	корисник 3
12	$P4 \Rightarrow K4, \text{ kade } K4 = XK13 + XK7$	корисник 4
13	$R4 \leq K4, \text{ kade } R4 = Rd * P4$	корисник 4
14	$0.0 \leq X_i \leq Li, (i=1,13)$	13 цевководи

(2) РЕШАВАЊЕ НА ЗАДАЧАТА НА ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ

Во поставената оптимизациона задача, сите релации во целната функција и во множеството на ограничувањата се од линеарен облик, така што оваа задача може да се решава на следните начини: (1) со изработка на изворен програм базиран на ЛП изработен на фамилијарен програмски јазик, и (2) со користење на комерцијални програми кои имаат капацитет за решавање на вакви задачи. Во продолжение е дадено решението на оптимизационата задача со примена на

алатката SOLVER од програмот MS EXCEL. Параметрите на оваа алатка за решавање на формализираната оптимизациона задача се прикажани на [слика 3.6](#). Во целната ќелија (Target Cell) се означуваат нето добивките (вредноста на целната функција), за кои се избира – еднакво на максимална вредност (Equal to Max). Во прозорецот за променливи ќелии (By changing Cells), се означува векторот на непознатите. И на крај се внесуваат ограничувањата (неравенките) и условите (равенките), од множеството на ограничувања (Constraints). Откако ќе се припреми моделот, со клик на копчето за решавање (Solve), се добива решението на поставената задача, за еден влезен вектор на непознатите. Оваа постапка треба да се повтори за неколку влезни (претпоставени) вектори на непознатите, со цел да се потврди дека определеното решение не е локален, туку глобален екстрем на целната функција.



Сл. 3.6. Параметри на алатката SOLVER на програмот MS EXCEL

(3) ИНТЕРПРЕТАЦИЈА НА ИЗЛЕЗНИТЕ РЕЗУЛТАТИ

Решението на оптимизационата задача изнесува $\max D_n = 3,871.01 \text{ €/}\Delta t$, што претставува максимални нето добивки на анализираниот регионален водоснабдителен систем. Добивките и трошоците, сумарни и поединечни, за одреден временски интервал Δt (кој може да биде, на пример, ден, месец или година, зависно од финансиската анализа на влезните податоци, [табела 3.2](#)) се дадени во [табела 3.5](#).

Таб. 3.5. Вредности на целната функција

Dobivki-korisnici		Troshoci-izvori		Troshoci-cevovodi	Neto dobivki
DK1	5,292.00	TI1	9,868.36		Dn 3,871.01
DK2	4,037.50	TI2	3,600.00		
DK3	5,771.50	TI3	1,400.00		
DK4	5,890.50				
sumDK	20,991.50	sumTI	14,868.36	sumTC	2,252.13

Проверката дали решението е глобален, а не локален екстрем на целната функција проверено е со три варијанти на почетни вредности на непознатите X_0 . Со анализа на чувствителноста на решението на промена на почетните

претпоставени вредности на варијаблите се потврдува дека решението претставува глобален екстрем, [табела 3.6](#).

Таб. 3.6. Проверка на оптималното решение со различни иницијални вредности на варијаблите

rb	Xo[l/s]	X [l/s]	Xo[l/s]	X [l/s]	Xo[l/s]	X [l/s]
1	60.0	60.00	60.00	60.00	40.00	60.00
2	50.0	15.98	15.98	15.98	40.00	15.98
3	65.0	65.00	65.00	65.00	40.00	65.00
4	45.0	35.00	35.00	35.00	40.00	35.00
5	45.0	45.00	45.00	45.00	40.00	45.00
6	35.0	0.00	0.00	0.00	40.00	0.00
7	55.0	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00
8	40.0	0.00	0.00	0.00	40.00	0.00
9	35.0	9.38	9.38	9.38	40.00	9.38
10	35.0	35.00	35.00	35.00	40.00	35.00
11	40.0	38.47	38.47	38.47	40.00	38.47
12	35.0	31.85	31.85	31.85	40.00	31.85
13	50.0	28.93	28.93	28.93	40.00	28.93
max Dn=		3,871.01		3,871.01		3,871.01

Определувањето на вредноста на критериумот на оптимизацијата е првиот дел во решавањето на оптимизационата задача, а вториот се состои во проценка на вредностите на варијаблите во системот, со кои се постигнува оптималното решение. Во продолжение се дадени оптималните параметри на водоспроводноците, изворите на вода и капацитетите за корисниците (со кои во следна фаза треба да се димензионира станицата за третман на сурова вода и дистрибутивната мрежа за крајните потрошувачи.

Со анализа на оптималните параметри на водоспроводноците ([табела 3.7](#)) може да се заклучи дека граничниот сумарен капацитет на цевководите од 590.0 л/с, може да се намали на 404.6 л/с. Капацитетите на одредени потези значително се намалуваат (на пример, бр. 2, бр. 9 и бр. 13), додека некои потези треба целосно да се исклучат од регионалниот систем (потези бр. 6 и бр. 8).

Таб. 3.7. Оптимални параметри на потезите за водоспроводноци

rb	L[l/s]	C[€/l/s]	Z [-]	X [l/s]	XK [l/s]	XS [l/s]
1	60.0	6.0	0.10	60.00	54.00	57.00
2	50.0	2.6	0.15	15.98	13.58	14.78
3	65.0	2.7	0.11	65.00	57.85	61.43
4	45.0	9.0	0.12	35.00	30.80	32.90
5	45.0	9.5	0.08	45.00	41.40	43.20
6	35.0	3.5	0.09	0.00	0.00	0.00
7	55.0	9.0	0.12	40.00	35.20	37.60
8	40.0	5.0	0.14	0.00	0.00	0.00
9	35.0	5.1	0.16	9.38	7.88	8.63
10	35.0	5.3	0.11	35.00	31.15	33.08
11	40.0	5.0	0.10	38.47	34.62	36.54
12	35.0	4.8	0.11	31.85	28.35	30.10
13	50.0	4.3	0.16	28.93	24.30	26.61
sum=	590.0			404.6	359.1	381.9

Со анализа на оптималните параметри на изворите за водоснабдување (табела 3.8) може да се заклучи дека граничниот сумарен капацитет на изворите од 280.0 л/с, може да се намали на 261.0 л/с. Капацитетот на изворот бр. 1, може да биде намален, што значи може да се реализира помала акумулација, односно пониска брана – соодветна за корисен простор со кој се обезбедува регулирано протекување од 141.0 л/с.

Таб. 3.8. Оптимални параметри на изворите за водоснабдување

rb	I_max [l/s]	I [l/s]
1	160.000	140.977
2	80.000	80.000
3	40.000	40.000
sum	280.000	260.977

Со оптималните параметри на корисниците се избираат капацитетите за корисниците, со кои во следна фаза треба да се димензионираат станиците за третман на сурова вода и дистрибутивните мрежи за крајните потрошувачи. Со анализа на оптималните параметри на корисниците со сурова вода (табела 3.9) може да се заклучи дека граничниот сумарен капацитет на корисниците од 250.0 л/с, може да се рационализира на 215.5 л/с.

Таб. 3.9. Оптимални параметри на корисниците на сурова вода

rb	P [l/s]	R [l/s]	K [l/s]
1	60.00	51.00	54.00
2	50.00	42.50	42.50
3	70.00	59.50	59.50
4	70.00	59.50	59.50
sum	250.00	212.50	215.50

4. Примена на динамичкото програмирање во оптимизација на ВСС

4.1. Увод во динамичкото програмирање

Динамичкото програмирање (ДП) е посебен математички апарат развиен од математичарот Richard Bellman¹¹ (Ричард Белман) во 1957 година. ДП е еден од најоперативните нумерички методи за изнаоѓање на оптимално решение кај задачи со етапна структура и наоѓа огромна примена при оптимизацијата на ВСС каде критериумскиот функционал има нелинеарен облик. Методот на ДП се состои во примената на **принцип на оптималност**, кој математички изразен се сведува на поставување на низи на функционални равенки. Основна дефиниција на интуитивниот принцип на оптималност е следнава: „За процеси, каде стратегијата зависи од тековната состојба, оптималната стратегија има таква особина што: (1) независно од почетната состојба и првобитното решение, (2) следното решение треба да одредува оптимална стратегија во однос на состојбата добиена од првобитното решение.“ Или поедноставна формулација за принципот на оптималност би била: „Оптималната стратегија ја има таа особина што независно од тоа како сме дошле во некоја етапа на управувањето, следното управување треба да се одвива по оптимална стратегија, која важи од таа етапа до крајот“.

Пред да се опише математичката формализација на принципот на оптималност, би требало да се објаснат поимите: етапен процес и сепарабилна целна функција. Овие поими се значајни, бидејќи единствените услови кои треба да бидат задоволени, за да се примени методот на ДП во решавање на оптимизациона задача за разгледуван процес се: (1) да е можна формализација на етапниот процес, и (2) целната функција да има сепарабилен карактер. Во системските анализи на одреден феномен, истражувањето на трансформацијата на системот може да се третира како реализација на процес во повеќе интервали, или етапи. За секоја етапа во реализацијата на одреден процес може да се идентификуваат: (а) состојби - на границите на интервалот, и (б) управувања - во тек на интервалот. Под етапен процес се подразбира реализација на процес (или однесување на систем), каде состојбата на крајот на било кој интервал, е во функција од: (а) состојбата на почетокот од интервалот, и (б) избраното управување во тековниот интервал. Додека, под сепарабилен карактер на целната функција, се подразбира следново: (а) целната функција да може да се раздели по етапи, и (б) може да се определи кумулативната вредност на целната функција, после извршувањето на процесот.

Преведувањето на принципот на оптималност на математички јазик може да се илустрира со постапката за оптимизација на целната функција $F(u)$ од сепарабилен карактер, каде е непознато множеството на управувањата $\{U_N\} =$

¹¹ Richard Ernest Bellman (August 26, 1920 – March 19, 1984) was an applied mathematician, celebrated for his invention of dynamic programming in 1953, and important contributions in other fields of mathematics.

$\{U_k, k=1, N\}$. Критериумот за оптимизација е екстремизацијата (минимум или максимум) на целната функција, според следниов израз:

$$J: \text{eks} F_{(U)} = \text{eks} \sum_{k=1}^N D_{k(U_k)} \quad (4.1)$$

Целната функција претставува скаларна функција на ефективност, што е резултат на реализацијата на “N” етапен процес. Етапниот процес е дефиниран со трансформацијата на состојбите:

$$S_k = T_{(S_{k-1}, U_k)}; \quad k = 1, N \quad (4.2)$$

Понатаму ја воведуваме ознаката $f_{N(S_N)}$, каде на симболичен начин се изразува екстремната вредност на целната функција, која зависи од бројот на етапите “N” и состојбата во $N^{\text{та}}$ етапа S_N :

$$f_{N(S_N)} = \text{eks}_{\{U_N\}} \sum_{k=1}^N D_{k(U_k)} \quad (4.3)$$

Следствено, за процес со “N-1” етапи се добива следниов израз:

$$f_{N-1(S_{N-1})} = \text{eks}_{\{U_{N-1}\}} \sum_{k=1}^{N-1} D_{k(U_k)} \quad (4.4)$$

Со користење на принципот на оптималност (анализирајќи го процесот од крајот кон почетокот): „Независно од управувањето во $N^{\text{та}}$ етапа, управувањето во преостанатите N-1 етапи, треба да се реализира по оптимална стратегија“, се добива следната функционална релација:

$$f_{N(S_N)} = \text{eks}_{\{U_N\}} \sum_{k=1}^N D_{k(U_k)} = \text{eks}_{\{U_N\}} \left[D_{N(U_N)} + \sum_{k=1}^{N-1} D_{k(U_k)} \right] \quad (4.5)$$

Ако се разложи множеството на управувањата, $\{U_N\} = U_N \cup \{U_{N-1}\}$, и се замени изразот (4.4), се добива:

$$f_{N(S_N)} = \text{eks}_{U_N} \left[D_{N(U_N)} + \text{eks}_{\{U_{N-1}\}} \sum_{k=1}^{N-1} D_{k(U_k)} \right] = \text{eks}_{U_N} \left[D_{N(U_N)} + f_{N-1(S_{N-1})} \right] \quad (4.6)$$

Оваа релација важи за било која етапа, со што во математичка форма се добива низата од функционални равенки:

$$f_{k(S_k)} = \text{eks}_{U_k} \left[D_{k(U_k)} + f_{k-1(S_{k-1})} \right]; \quad k = 1, N \quad (4.7)$$

Првиот член од средната заграда (од [р-ка 4.7](#)), ја одредува вредноста на целната функција во $k^{\text{та}}$ етапа за избраното управување U_k , а вториот член е условниот кумулативен екстрем на критериумскиот функционал од претходните “k-1” етапи, со кој се изразува повратниот карактер на релациите, поради што тие најчесто се нарекуваат рекурентни равенки. Суштината на ДП се состои во следново: со сукцесивно решавање на низата на рекурентни равенки, екстремизацијата на функција со “N” променливи се заменува со N-етапен процес на екстремизација на функција со една променлива.

4.2. Основни поими на задачата на динамичкото програмирање

Употребата на апаратот на ДП за добивање на решение на оптимизационата задача не е стандардна, така што за користење на методот на ДП е неопходно солидно познавање на: (I) суштината на анализираната задача (конструкција на математички модел и формирање на низи на рекурентни равенки), и (II) математичкиот апарат на ДП.

Под конструкција на математичкиот модел се подразбира идентификација и егзактно аналитичко формализирање на етапниот процес, ограничувањата и критериумскиот функционал. Процесот наједноставно може да се опише како однесување на системот во тек на етапите, а етапен процес е специјален вид на процес, каде е познат операторот на трансформацијата на состојбите при позната почетна состојба. Во примената на ДП за оптимално управување со ВСС ќе бидат анализирани: етапни, конечни, дискретни, стационарни и детерминистички процеси. При реализација на процесот се анализираат скаларни сепарабилни функции, кои имаат физичко толкување, со кои се дефинира целната функција или критериумскиот функционал.

Под математички апарат на ДП се подразбира пресметувачката постапка на ДП, која независно од сложеноста на оптимизационата задача, содржи најмалку две фази. Во првата фаза, „етапа напред“, од почеток до крај (можен е и спротивен правец), со последователно решавање на низите на рекурентните равенки за (M) димензионален систем, за секоја етапа (k) и пресметувачки јазел од дискретизацијата на состојбите, се добиваат вредностите на (M) димензионалниот вектор на условни кумулативни оптимуми на целната функција $F(s_1, s_2, \dots, s_M)$ и $(M+1)$ димензионалниот вектор на оптималните управувања $U(s_1, s_2, \dots, s_M, k)$. Од $F(s_1, s_2, \dots, s_M)$ за последната етапа, со пребарување, се определува екстремот на критериумскиот функционал и се регистрира оптималната состојба за која се постигнува екстремната вредност. Во втората фаза, „етапа назад“ (спротивен правец од првата фаза), паралелно се пресметуваат оптималната стратегија на управувања, со користење на $U(s_1, s_2, \dots, s_M, k)$, и оптималната траекторија на состојби (со примена на инверзната трансформација на состојбите).

Треба да се нагласи дека ДП не е генерален (општ или универзален) метод за решавање на оптимизациони задачи, зашто секоја задача е делумно уникатна, оригинална и претставува проблем за себе. Од овде произлегува дека за решавање на идентификувана оптимизациона задача со методот на ДП потребно е да се направи посебен математички модел. Затоа, во моделирањето, покрај користењето на рутинските модули, потребна е креативност, инвентивност и одредена аналитичка и програмерска вештина на планерот за решавање на поставената задача со примена на методот на ДП.

Интуитивниот принцип на оптималност и апликацијата на динамичкото програмирање, наједноставно може да се илустрира во задачата каде се бара оптималната траса, каде се познати трошоците на делниците меѓу станиците. При практична примена на методот на ДП, решавање на низите на рекурентни равенки, најчесто се користи нумерички (приближен) метод, чија точност зависи

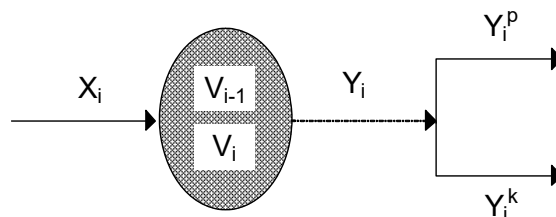
од дискретизацијата на состојбите. Меѓутоа, идентификувани се оптимизациони задачи каде, со користење на методот на ДП, е можно аналитичко решавање на оптимизациониот проблем. Поставување и решавање на ваква задача во водостопанската практика е поврзана со рецикулација на водниот ресурс.

Оваа метода називот „динамичко програмирање“ го добила бидејќи во почетокот била развиена за решавање на оптимизациони задачи каде етапите биле временски интервали. Набрзо се увидело дека можностите на овој метод на операционите истражувања се далеку поголеми, и дека етапите може да бидат најразлични координати во управувачкиот процес. Затоа, најверојатно, поадекватен назив за методата би бил „етапно програмирање“, но за да се задржи континуитет со првобитниот назив, преовладало убедувањето насловот да не се менува. Така, во задачите на оптимална распределба на ресурси, ако процесот е статичен во временски смисол, тогаш задачата може да се дефинира како „статичка задача на етапното програмирање“, каде етапите на процесот ќе бидат корисниците на ресурсот.

4.3. Модифицирани модели на ДП за оптимална анализа на ВСС со акумулација

Треба да се подвлече дека се можни огромен број на модификации на основниот модел за управување со ВСС со акумулација. Така, во водостопанската практика честопати се поставува проблем со изнаоѓање на оптимално управување со собирен водоспроводник за довод на вода во акумулација (или управување со влез во резервоар), каде управувачката координата е влез во системот $u_i = x_i$.

Според вообичаената интерпретација на примената на ДП за оптимална анализа на ВСС со акумулација (слика 4.1) се претпоставува дека координатата на управување е еднаква на сумарниот излез од акумулацијата $u_i = y_i$.



Сл. 4.1. Шема на еднодимензионален ВСС со еднократно користење на водата

Можен е и друг начин на формулирање на низите на рекурентни равенки, за кој практиката покажала дека обезбедува поефикасно решавање на оптимизационите задачи. Доколку се усвои, координата на управување да биде состојбата на почетокот во $i^{\text{тиот}}$ интервал, односно ако ја воведеме следнава замена:

$$u_i = V_{i-1}; \quad (u_1 = V_0 = V_{\text{пос}}) \quad (4.8)$$

тогаш излезната големина од системот се заменува со следниот израз:

$$y_i = u_i - V_i + x_i; \quad (i=1, N) \quad (4.9)$$

Во овој случај ограничувањата на управувањата ќе се изразат со следните неравенки:

$$\begin{aligned}
u_i^{\min} \leq u_i = V_i - x_i + y_i \leq u_i^{\max} &\Rightarrow \begin{cases} y_i \rightarrow 0.0 \Rightarrow u_i \rightarrow u_i^{\min} \\ y_i \rightarrow P_i \Rightarrow u_i \rightarrow u_i^{\max} \end{cases} \\
u_i^{\min} \geq \begin{cases} V_{i-1}^{\min} \\ V_i - x_i \end{cases}; \quad u_i^{\min} \leq u_i^{\max} \leq \begin{cases} V_{i-1}^{\max} \\ V_i - x_i + P_i \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Низите на рекурентни равенки за модел на ВСС со еднократно користење на водниот ресурс (слика 4.1), ќе се добијат во следниот облик:

$$f_{i(V_i)} = \max_{u_i} \{D_{i(y_i)} + f_{i-1}(u_i)\} \quad i = 1, N \tag{4.11}$$

Каде што излезот “ y_i ”, од кој зависат добивите $D_i(y_i)$, се пресметува со релацијата 4.9.

Во продолжение се наведени модификациите на основниот модел за решавање на управувачките задачи со примена на ДП, за случај на променлив оперативен корисен волумен во акумулацијата. Ваква управувачка задача е актуелна доколку се определува оптималното управување со акумулациона хидроцентра, инкорпорирана во ВСС наменет за одбрана од поплави. Кај ВСС наменет за одбрана од поплави и енергетика, корисниот волумен на акумулацијата е поделен на два дела: резервиран и оперативен. Погрешно е резервираниот корисен простор да се поистоветува со ретензиониот простор - волумен над нормалното ниво во акумулацијата. Со ретензиониот волумен се променува обликот и пикот на поплавниот бран, односно излезниот хидрограм на протечи е со ублажена врвна вредност, но истиот не е управлив (контролабилен). Така, може да се констатира дека, контролата на поплавниот бран (или управувањето со протечите во низводната хидролошки загрошена област), се извршува во резервираниот корисен волумен, а временската прераспределба на протекувањата за потребите на ХЕЦ се спроведува во оперативниот корисен волумен на акумулацијата.

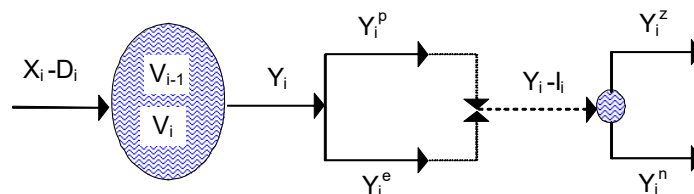
Може да се претпостави дека природата, во сите сезони во тек на годината, нема еднаква способност да генерира максимален поплавен бран. Според оваа претпоставка, за да се максимизира енергетската ефективност на ХЕЦ, логично би било резервираниот корисен простор да биде променлив во тек на годината, и максималните вредности да ги достигне во критичните хидролошки периоди за разгледуваната област. Ако се истражува оптималното управување на акумулациона ХЕЦ, со променлив оперативен корисен простор, тогаш е неопходна модификација на ДП. Клучна одлика на модифицираниот модел на ДП со променливи максимални ограничувања на состојбите е промената на прирастот на пресметувањето. Така што, ако со dz_m е означен прирастот на состојбите на крај од $m^{\text{тиот}}$ месец, тогаш прирастот на управувањата за определување на оптималното управување во $m^{\text{тиот}}$ месец ќе изнесува $du = dz_{m-1}$.

За крај од оваа потточка, треба да се истакне дека решавањето на било која практична задача од областа на оптимална анализа со ВСС со акумулација подразбира: креирање, тестирање и апликација на компјутерски програм. Односно, обемните нумерички експерименти со примена на ДП, за истражување на одговорот на системот на зададено хидролошко оптоварување во периодот на експлоатација, се изводливи само со соодветна софтверска поддршка. Затоа, за

сите што активно преферираат да се бават со решавање на управувачки водостопански задачи, знаењето што го стекнале со изучувањето на предметна материја (теоретска подлога и решени примери), неопходно е да го комплетираат со изработка на софтвер, на некој од фамилијарните програмски јазици. Со цел компјутерските програми да бидат достапни за користење на поголем број планери во водостопанството, тие треба да бидат прегледни, со јасна прикажана применливост според конфигурацијата и намените на ВСС, и со едноставно и концизно упатство за користење.

4.4. Водостопански систем со двократно користење на водниот ресурс

За рационално искористување на водниот ресурс пожелно е повеќекратно користење на водата (слика 4.2). Една од можните комбинации (ако конфигурацијата на хидројазелот ја дозволува) е директно енергетско искористување Y_e и индиректно задоволување на потреби за наводнување Y_n , при постоење и на директни (од акумулација) D_i и индиректни (од низводен зафат) I_i потрошувачи.



Сл. 4.2. Шема на ВСС со двократно користење на водата

Етапниот процес од математичкиот модел на оптимизационата задача може да се формализира со стандардните релации за хидросистеми со акумулации. За определување на ограничувањата на состојбите се користи билансната равенка во дискретна форма, со претпоставки за 100% подмирување на загуби и приоритети, односно $X_i \geq D_i$ и $Y_i \geq I_i$. Ограничувањето од долна страна се добива кога исполнетоста на почетокот од тековниот временски интервал е минимална и излезот од акумулацијата е максимален, а горното ограничување се добива за максимална почетна исполнетост и минимално испуштање од акумулацијата. Ова логичко размислување аналитички се формализира со следните условни релации за ограничувањата на состојбите:

$$\begin{aligned}
V_i^{\min} &\leq V_i \leq V_i^{\max} \\
V_i &= V_{i-1} + (x_i - D_i) - y_i; \quad V_{i=0} = V^{poc} \\
\min: &\left(\begin{array}{l} V_{i-1} \xrightarrow{\min} V_{i-1}^{\min} \\ y_i \rightarrow \max Y_i = MAX(Y_i^{\max}, Y_{n_i}^{\max} + I_i) \end{array} \right) \Rightarrow V_i^{\min} \\
V_i^{\min} &\geq \begin{cases} V_{i-1}^{\min} + (x_i - D_i) - \max Y_i \\ \min V \end{cases} \\
\max: &\left(\begin{array}{l} V_{i-1} \xrightarrow{\max} V_{i-1}^{\max} \\ y_i \rightarrow \min Y_i = MAX(0.0, I_i) \end{array} \right) \Rightarrow V_i^{\max} \\
V_i^{\max} &\leq \begin{cases} V_{i-1}^{\max} + (x_i - D_i) - \min Y_i \\ \max V \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Ограничувањата на управувањата се изразуваат со следните релации:

$$\begin{aligned}
U_i^{\min} &\leq U_i \leq V_i^{\max} \\
U_i &= V_{i-1} = V_i - (x_i - D_i) + y_i; \quad U_{i=1} = V^{poc} \\
\min: &\left(y_i \xrightarrow{\min} \min Y_i \right) \Rightarrow U_i^{\min} \geq \begin{cases} V_{i-1}^{\min} \\ V_i - (x_i - D_i) + \min Y_i \end{cases} \\
\max: &\left(y_i \xrightarrow{\max} \max Y_i \right) \Rightarrow U_i^{\max} \leq \begin{cases} V_{i-1}^{\max} \\ V_i - (x_i - D_i) + \max Y_i \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Критериумот за оптимизација е изразен со следниот функционал:

$$\begin{aligned}
F_{(V,Y)} &= \sum_{i=1}^N [De_i(V_i, U_i, y_i) + Dn_i(y_i)] \\
J: &\max_{\{U_i, i=1, N\}} F_{(V,Y)}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

каде што добивките од енергетиката и од наводнувањето се пресметуваат со релациите 2.2.1 и 2.2.2 прикажани во [точката 2.1](#).

Низите на рекурентни равенки за модел на ВСС со двократно користење на водниот ресурс ([слика 4.2](#)) ќе се добијат во следниот облик:

$$f_i(V_i) = \max_{U_i} [De_i(Y_i^e, V_{i-1}, V_i) + Dn_i(Y_i^n) + f_{i-1}(U_i)] \quad i = 1, N \tag{4.15}$$

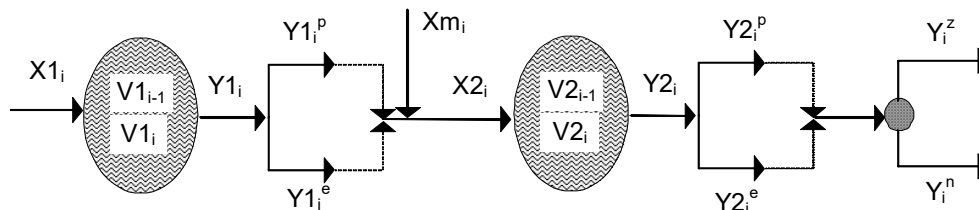
4.5. Повеќедимензионални водостопански системи

Ако во состав на сложениот ВСС има 2 или повеќе акумулации, тогаш ВСС го нарекуваме повеќедимензионален. При примената на апаратот на ДП за оптимизација на повеќедимензионалните ВСС неопходни се соодветни модификации.

Зависно од конфигурацијата на сложениот ВСС, каде подсистемите (акумулациите) задоволуваат потреби на заеднички корисници, постојат интеракции во управувањата со акумулациите, кои може да се поделат на два вида: (1) сервиска врска (каде излезот од спротиводниот подсистем директно влијае врз влезот на низводната акумулација), и (2) паралелна врска (каде

излезот од првата акумулација, произволно избрана, директно влијае врз излезот на втората акумулација).

а) Сериски (каскаден) водостопански систем



Сл. 4.3. Шема на сериски ВСС со двократно користење на водата

При определување на ограничувањата на состојбите и управувањата, максималните - гранични вредности за излезите од акумулациите за серискиот ВСС (прикажан на [слика 4.3](#)) се пресметуваат со следните релации:

$$\begin{aligned} \max Y2_i &= \text{MAX}(Y2e_i^{\max}; Yn_i^{\max}) \\ \max Y1_i &= \text{MAX}(Y1e_i^{\max}; \max Y2_i - X_{m_i}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

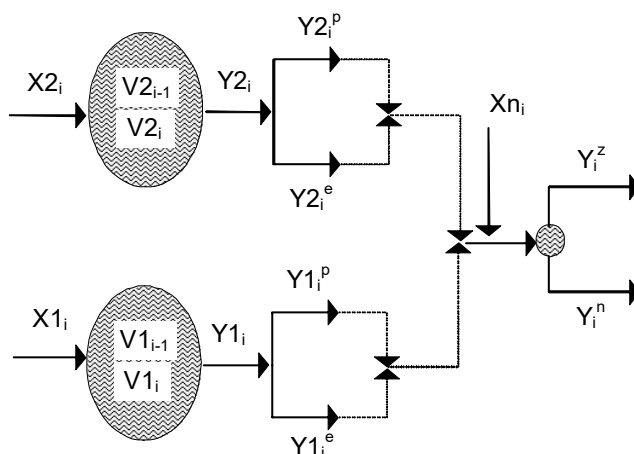
Низите на рекурентни равенки за модел на сериски ВСС со двократно користење на водниот ресурс ([слика 4.3](#)) ќе се добијат во следниот облик:

$$f_i(V1_i, V2_i) = \max_{U1_i} \left\{ D1e_i(Y1_i^e, V1_i^{sr}) + \max_{U2_i} [D2e_i(Y2_i^e, V2_i^{sr}) + Dn_i(Y_i^n) + f_{i-1}(U1_i, U2_i)] \right\} \quad (4.17)$$

б) Паралелен водостопански систем

При определување на ограничувањата на состојбите и управувањата, максималните - гранични вредности за излезите од акумулациите за паралелниот ВСС прикажан на [слика 4.4](#) се пресметуваат со следните релации:

$$\begin{aligned} \max Y1_i &= \text{MAX}(Y1e_i^{\max}; Yn_i^{\max} - Xn_i) \\ \max Y2_i &= \text{MAX}(Y2e_i^{\max}; Yn_i^{\max} - Xn_i - Y1_i) \end{aligned} \quad (4.18)$$



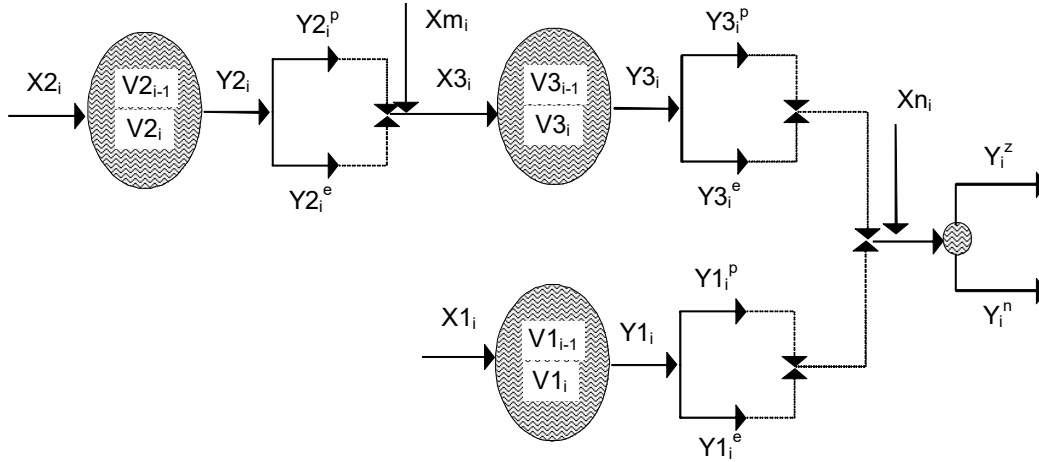
Сл. 4.4. Шема на паралелен ВСС со двократно користење на водата

Низите на рекурентни равенки за модел на паралелен ВСС со двократно користење на водниот ресурс ([слика 4.4](#)) ќе се добијат во следниот облик:

$$f_i(V1_i, V2_i) = \max_{U1i} \left\{ D1e_i(Y1_i^e, V1_i^{sr}) + \max_{U2i} [D2e_i(Y2_i^e, V2_i^{sr}) + Dn_i(Y_i^n) + f_{i-1}(U1_i, U2_i)] \right\} \quad (4.19)$$

в) Комбиниран водостопански систем

Ако во сложениот ВСС има 3 или повеќе акумулации, и ако подсистемите се поврзани и со сериски и со паралелни врски, тогаш таквиот ВСС се нарекува комбиниран ВСС.



Сл. 4.5. Шема на комбиниран ВСС со двократно користење на водата

При определување на ограничувањата на состојбите и управувањата, максималните - гранични вредности за излезите од акумулациите за комбинираниот ВСС прикажан на [слика 4.5](#) се пресметуваат со следните релации:

$$\begin{aligned} \max Y1_i &= \text{MAX}(Y1_i^{\max}; Yn_i^{\max} - Xn_i) \\ \max Y3_i &= \text{MAX}(Y3_i^{\max}; Yn_i^{\max} - Xn_i - Y1_i) \\ \max Y2_i &= \text{MAX}(Y2_i^{\max}; \max Y3_i - Xm_i) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Низите на рекурентни равенки за модел на комбиниран ВСС со двократно користење на водниот ресурс ([слика 4.5](#)) ќе се добијат во следниот облик:

$$f_i(V1_i, V2_i, V3_i) = \max_{U1i} \left\{ D1e_i(Y1_i^e, V1_i^{sr}) + \max_{U2i} \left[D2e_i(Y2_i^e, V2_i^{sr}) + \max_{U3i} [D3e_i(Y3_i^e, V3_i^{sr}) + Dn_i(Y_i^n) + f_{i-1}(U1_i, U2_i, U3_i)] \right] \right\} \quad (4.21)$$

* * *

При решавање на оптимизационата задача кај повеќе акумулационен (М - димензионален) ВСС до полн израз доаѓа проблемот на димензиите. Така на пример, за да се утврди оптималното месечно управување со нумеричка грешка во прифатливи граници, за експлоатационен период од 40 години (за број на временски интервали $N_t = 40 \cdot 12 = 480$), прирастот од дискретизацијата на состојбите треба да биде барем $20^{\text{ина}}$ од корисните волумени на акумулациите, односно бројот на пресметковните јазли ќе биде $i_m = 21$ за $m = 1, M$. Ако вредностите во M^{tc} (M+1) димензионални вектори на оптимални управувања се

меморираат како real големина со single-precision (со 4 bytes), тогаш би биле потребни полиња со димензија од $M \cdot (N_i \cdot i_1 \cdot \dots \cdot i_M) \cdot 4 / 10^6$ MB. Односно за едноакумулационен ВСС би било потребно едно поле со $1 \cdot (480 \cdot 21) \cdot 4 / 10^6 = 0.040$ MB. За двоакумулационен ВСС би биле потребни две полиња со $2 \cdot (480 \cdot 21 \cdot 21) \cdot 4 / 10^6 = 1.693$ MB. За триакумулационен ВСС би биле потребни три полиња со $3 \cdot (480 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 21) \cdot 4 / 10^6 = 53.343$ MB.

Кај водостопанските анализи за повеќе-димензионалните ВСС, во блиското минато - до 1995 година, била надмината оперативната меморија на DOS која изнесувала 0.640 MB и неопходни биле програмерски модификации за решавање на оптимизациониот проблем со користење на РС. Проблемот со димензионалноста можел да биде надминат со користење на привремени датотеки (temporary files) со секвенционален неформатиран (sequential unformatted) запис на тврдиот диск (hard disc). Привремените датотеки се бришеле после секоја итерација (или егзекуција) на програмот, и затоа бил неопходен голем празен простор на дискот за коректно решавање на оптимизационата задача.

Со развојот на информатиката - зголемувањето на капацитетот на хардверот и усовршувањето на софтверот (програмските јазици) во Windows опкружувањето - наведените проблеми со ограничената оперативна меморија се надминати. Денес, повеќе не се потребни наведените математички и програмерски трикови (неопходни до 1995 година), за совладување на „проклетството“ на димензиите при решавање на оптимизационите проблеми со методот на ДП. Меѓутоа, не треба се превиди фактот дека после секој скок во пресметувачката технологија, растат и амбициите за моделирање и решавање на сè посложени инженерски проблеми. Така, начинот за совладување на проблемот со малата оперативна меморија во DOS, може да послужи како пример дека секогаш постои решение во нумеричкото моделирање.

4.6. Диференцијално динамичко програмирање

Диференцијалното динамичко програмирање (ДДП), во литературата е познато и како инкриментално динамичко програмирање, е развиено од Bernholtz и Graham во 1960^{та} година, а примената на овој модифициран метод на ДП за решавање на оптимизациони задачи кај водните ресурси се поврзува со W. Hall во 1969^{та} година. Методот на ДДП претставува нумеричка декомпозиција со што се совладува нумеричката гломазност на оптимизационата задача.

Поимот декомпозиција (раздвојување на проблемот на подпроблеми) не се однесува само на нумеричкиот аспект кај водостопанските планирања. Имено, декомпозицијата (разложувањето) на сложениот ВСС на подсистеми може да биде и по:

- (а) функција - според водостопански функции и цели;
- (б) територија - според заокружени хидрографски целини;
- (в) време - со постапно намалување на временските интервали, и
- (г) нумерика - со итерации за уточнување на решението.

Суштината на методот на ДДП се состои во: (1) редуцирање на димензионалноста на оптимизационата задача и (2) намалување на потребното

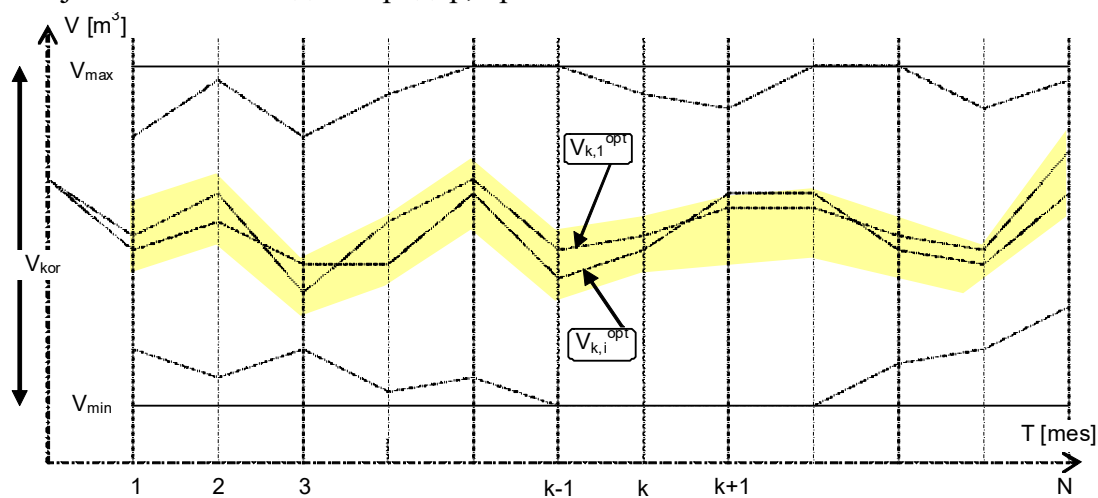
време за егзекуција на оптимизационите пресметувања, при што не се намалува точноста на решението.

Во задачата на оптимална анализа, посебно доколку акумулацијата е со огромни димензии, се наметнува практичниот проблем колку треба да изнесува бројот на пресметувачките јазли или нараснувањето на волуменот од дискретизацијата на состојбите на системот, од што директно зависи точноста на пресметувањето. Ако како процедура за оптимизација се користи ДП, тогаш пресметувањето треба да се спроведи во повеќе итерации со постапно подобрување на точноста на пресметувањето (намалување на прирастот на волуменот). Во тој случај логично се наметнува размислата дека резултатот од анализите би бил задоволителен ако релативното подобрување на оптимумот на критериумскиот функционал е помало од некоја претходно усвоена мала вредност, која математички може да се формализира со следната условна релација:

$$\therefore (\max J_i - \max J_{i-1}) / \max J_i \leq \xi = 0.001 \Rightarrow i = \text{kraj} \quad (4.22)$$

Со горниот израз се означува дека ако со $i^{\text{та}}$ итерација релативното подобрување на оптимумот е помало од ξ , тогаш $i^{\text{тата}}$ итерација е крајна, бидејќи подобрувањето на оптимумот во тековната итерација е толку мало што би било неоправдано дополнително пресметување со зголемување на бројот на пресметувачките јазли. Проблемот во примената на методот на ДП во ваков итеративен циклус се состои во тоа што со мало зголемување на бројот на пресметувачки јазли енормно се зголемува обемот на пресметувањето, што произлегува од нумеричкиот апарат на ДП. Овај недостаток на класичниот метод на ДП за решавање на реални оптимизациони задачи, за управување на ВСС со акумулација, се отстранува со неговата модификација, методот на ДДП.

Суштината на методот на ДДП се состои во: (1) почетна итерација - иницијализација на почетна оптимална траекторија на состојби во корисен простор и (2) итеративен циклус - итеративно подобрување на траекторијата на состојбите во лентовиден коридор, прикажано на [слика 4.6](#).



Сл. 4.6. Дијаграм на оптимална почетна траекторија во корисен простор и оптимална траекторија на состојби во лентовиден коридор

Ако се воведат ознаките V_{kor} е корисен волумен во акумулацијата, I_k е број на пресметувачки јазли во корисниот простор и I_l е непарен број на пресметувачки јазли во лентовидниот коридор, тогаш dV_k е нараснувањето на волуменот во почетната итерација и dV_l е прирастот на волуменот во итеративниот циклус, кои се пресметуваат со следните равенки:

$$dV_k = V_{kor} / (I_k - 1); \quad dV_l = dV_k / (I_l - 1) \quad (4.23)$$

Прво, во почетната итерација ($i=1$) со груба точност dV_k се решава задачата на оптимална анализа на ВСС во корисниот простор и се наоѓа почетната оптимална траекторија на состојби $\{V_{k,1}^{opt}; k=1,N\}$ и екстремот (максимумот, ако се анализираат добивки) на критериумот на управувањето $\max J_1$.

Второ, во итеративен циклус ($i=2, N_i$ - број на итерации), со зголемена точност на пресметувањето со dV_l , во лентовиден коридор на можни состојби околу претходната оптимална траекторија $\{V_{k,i-1}^{opt}; k=1,N\}$ се бара подобрената оптимална траекторија $\{V_{k,i}^{opt}; k=1,N\}$ и максимумот на критериумскиот функционал $\max J_i$. Итерациите продолжуваат се додека не се задоволи претходно наведената условна релација или не се достигни усвоениот број на итерации N_i .

5. Имплицитен стохастички пристап кај управувањето со ВСС

Детерминистичката концепција за анализа на ВСС (со веќе реализираната, историска хидролошка низа), ги содржи следните слабости:

1. Анализите се базирани на кратки, веќе реализирани, хидролошки серии, односно на такви комбинации на протекувања кои сигурно нема да се повторат во фаза на експлоатација;
2. Управувањето со ВСС е детерминистичко, само со една историска влезна серија, со што се добиваат резултати на страна на несигурноста;
3. Забележаната серија е само една можна реализација на хидролошкиот процес. Сосем е извесна можноста, во експлоатација на ВСС, да се појават понеповолни комбинации на протекувањата, по однос на последователно натрупување на сушни и водни години.

Овие слабости на детерминистичката концепција се надминати со имплицитниот стохастички пристап каде се подразбираат следните етапи на пресметување:

- а. Симулирање, продолжување на хидролошките серии, со што се добива множество на влезни серии во експлоатациониот период со подеднаква веројатност на појава;
- б. Истражување на однесувањето на системот за сите сценарија на влезните големини (генерирани синтетички влезни серии);
- в. Пробабилистичка интерпретација на излезните резултати за согледување на обезбеденоста на функционирањето на системот. Врз основа на веројатностната анализа, доносителот на одлука, изборот на оптимални параметри го извршува со поголема поузданост.

Треба да се истакни дека синтетичките низи не го подобруваат степенот на точноста на хидролошката информација, туку овозможуваат врз база на статистичките карактеристики на пробата (узоракот) да се извлечат максимум информации за можните хидролошки режими. Со тоа се допринесува за зголемување на доверливоста, сигурноста при планирањето на ВСС.

Симулациониот математички модел за естимација на хидролошкиот влез треба да ги задоволи следните барања:

1. Синтетичките серии мора да ги сочуваат битните стохастички карактеристики на појдовната историска низа (особина на автокорелација на годишните протекувања, со која се изразува феноменот на натрупување на сушни и водни години);
2. Распределбата на месечните протекувања треба да биде слична со појдовната низа (просечни вредности, коефициенти на асиметрија и варијација, автокорелација на месечните протекувања).

Во натамошниот текст ќе биде објаснета модифицирана метода на фрагменти со која се исполнуваат наведените критериуми. Според оваа метода (Б. Ѓорѓевиќ, 1973), моделирањето се извршува во два чекори: (1) генерирање на годишни протекувања, и (2) симулирање на месечни протекувања. Пред да се

примени историската низа на дотекувања во моделите за генерирање на синтетички низи мора да се изврши анализа на структурата на случајната променлива за да се утврди нејзината репрезентативност. Промената на природниот режим претставува тешкотија во стохастичкиот начин на истражување на површинското истекување. Под анализа на структурата на стохастичката променлива се подразбира проучување на: хомогеност и конзистенција, стационарност и автокорелација на процесот.

5.1. Анализа на структурата на историски низи

Доброто познавање на билансните, режимските и екстремните карактеристики на метеоролошките и хидролошките феномени во минатото е основаната база за водостопанското планирање. Исто така, еден од важните предуслови за планирање, изведба и експлоатација на ВСС е поуздана прогноза на хидрометеоролошките големини во иднината. За да се избегнат значајни отстапувања од вистинските вредности, а со тоа и промашувањата во стопански и економски смисол, потребно е да се провери конзистенцијата и хомогеноста на метеоролошките (инсолација, облачност, температура, атмосферски притисок, дожд, снег, ветер и сл.) и хидролошките (водно ниво, протекување, суспендиран и влечен нанос, мраз, ниво на подземна вода и сл.) податоци.

Под инконзистенција се подразбира грешка при мерењето, која може да биде случајна (од набљудувач), системска (од инструмент) или комбинирана. Под нехомогеност се подразбираат вистински промени во количините кои се мерат како резултат на значајни промени во природната околина. Овие промени може да бидат предизвикани под дејство на природни (поплави, шумски пожари, одрони на земјиште и сл.) или вештачки појави (наводнување, одводнување, урбанизација, регулирање на протекувањата со акумулации). Основни облици на инконзистенција и нехомогеност на хидрометеоролошките големини се: (1) скок - нагло зголемување или смалување, со формирање на узводна акумулација; (2) тренд - постепено зголемување или смалување, со развој на вегетацијата; (3) цикличност - периодично зголемување и смалување; (4) флукутација - зголемување или смалување на случајните варијации околу просекот и (5) комбиниран облик.

За анализа на структурата на средногодишните протекувања од забележаната низа, основните статистички параметри се дадени со релациите:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{12} Q_{i,j}; \quad \bar{Q} = \frac{\sum_{i=1}^N Q_i}{N}; \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Q_i - \bar{Q})^2}{N}} \quad (5.1)$$

каде што: $Q_{i,j}$ се месечни протекувања, Q_i се годишни протекувања, “N” е број на години, $\bar{Q}$ е средногодишно протекување, а σ е средноквадратно отстапување (стандардна девијација), на годишните протекувања на историската низа.

* * *

Анализа на хомогеност и конзистенција на процесот се испитува со цел да се утврди дали членовите од пробата потекнуваат од иста популација, што е

основниот предуслов за примена на стохастичка анализа. За оценка на хомогеноста на процесот се формираат две хипотези:

- (1) нулта хипотеза - според која информациите од пробата (од оригиналниот и модифицираниот дел) имаат иста функција за дистрибуција на густина на веројатност, односно нема статистички значајни промени, и
- (2) алтернативна хипотеза - според која елементите од пробата кои се споредуваат не потекнуваат од иста популација.

Споредувањето на двете хипотези се прави за одредено ниво на значајност α , кое е во границите од 1.0% до 10.0%, а најчесто $\alpha = 5.0\%$. Со зголемување на нивото на значајност (или ризик во хидрометеоролошката пракса) се приближуваат границите на поузданоста, т.е. се смалува областа за прифаќање на нултата хипотеза и критериумот за оценка на хомогеноста станува построг.

За практична примена на анализата на конзистенција и хомогеност на процесот, историската низа се дели на две приближно исти поднизи ($i \approx N/2$) или оригинална “X” и модифицирана “Y” проба (сите вредности на набљудуваната променлива од настанувањето до престанувањето на промените), со вкупни броеви на елементи N_x и N_y . За двете поднизи се определуваат статистичките параметри:

$$X \in (Q_1, Q_2, \dots, Q_i) \Rightarrow \bar{X}, \sigma_x \quad (5.2)$$

$$Y \in (Q_{i+1}, Q_{i+2}, \dots, Q_N) \Rightarrow \bar{Y}, \sigma_y \quad (5.3)$$

Од многубројните методи за тестирање на конзистенција и хомогеност на хидрометеоролошките податоци во натамошниот текст ќе бидат презентирани: нормализираниот “U” тест и стандардизираниите “t” тестови со еднакви и нееднакви варијанси.

Нормализиран “U” тест. За изведување на овој тест потребно е да се располага со голема оригинална проба и релативно голема модифицирана проба на набљудуваната променлива. Основните претпоставки на овај тест се:

- (1) членовите на оригиналната популација се меѓусебно стохастички независни;
- (2) членовите од оригиналната проба се нормално распределени, и
- (3) познати се параметрите на популацијата.

Единичната нормална девијација се пресметува со следната равенка:

$$U_0 = \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{N_y}}} \approx U(0,1) \quad (5.4)$$

Критериумот за прифаќање на нултата хипотеза, на ниво на значајност α , се изразува со следната условна релација:

$$U_{0+\alpha/2}(0,1) \leq U_0 \leq U_{1-\alpha/2}(0,1) \quad (5.5)$$

Стандардизиран “t” тест со еднакви варијанси. За изведување на овој тест потребно е да се располага со релативно голема оригинална и модифицирана проба на набљудуваната променлива. Основните претпоставки на овај тест се:

- (1) членовите на пробите се меѓусебно стохастички независни;
- (2) членовите од пробите се нормално распределени;

- (3) не се познати параметрите на популацијата, и
 (4) варијансите на пробите се еднакви.

Стандардизираниот единично отстапување, распоредено по “t” дистрибуција, се пресметува со следната равенка:

$$t_0 = \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{\sigma_{xy}^2 \left(\frac{1}{N_x} + \frac{1}{N_y} \right)}} \approx t(N_x + N_y - 2); \quad \sigma_{xy}^2 = \frac{N_x \sigma_x^2 + N_y \sigma_y^2}{N_x + N_y - 2} \quad (5.6)$$

Критериумот за прифаќање на нултата хипотеза, на ниво на значајност α , се изразува со следната условна релација:

$$t_{0 + \alpha/2}(N_x + N_y - 2) \leq t_0 \leq t_{1 - \alpha/2}(N_x + N_y - 2) \quad (5.7)$$

Стандардизиран “t” тест со нееднакви варијанси. Разликата со претходниот тест се состои во разликата меѓу варијансите на оригиналната и модифицираната проба од набљудуваната променлива. Стандардизираниот единично отстапување, распоредено по “t” дистрибуција, се пресметува со следната равенка:

$$t_0 = \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x^2}{N_x - 1} + \frac{\sigma_y^2}{N_y - 1} \right)}} \approx t(m_e); \quad m_e = \frac{\left(\frac{\sigma_x^2}{N_x - 1} + \frac{\sigma_y^2}{N_y - 1} \right)^2}{\frac{\sigma_x^4}{(N_x - 1)^3} + \frac{\sigma_y^4}{(N_y - 1)^3}} \quad (5.8)$$

Критериумот за прифаќање на нултата хипотеза, на ниво на значајност α , се изразува со следната условна релација:

$$t_{0 + \alpha/2}(m_e) \leq t_0 \leq t_{1 - \alpha/2}(m_e) \quad (5.9)$$

За проба со дистрибуција на веројатност блиска до нормалната, но со мала асиметрија, се користи Фишер-ова распределба на веројатноста, според следната релација:

$$F = \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \right)^2; \quad \therefore F < 1 \Rightarrow F = \frac{1}{F}; \quad S_x = N_x - 1; \quad S_y = N_y - 1 \quad (5.10)$$

Критериумот за хомогеност на пробата се изразува со следната неравенка:

$$|F| < F_{kr} = F_{kr}(\alpha, S_x, S_y) \quad (5.11)$$

* * *

Анализа на стационарност на процесот се прави за да се утврди дали има временски дисконтинуитети во информациите од пробата. За практична примена во истражувањето на стационарноста на процесот потребно е историската низа да се подели на неколку временски интервали и за таквите поднизи да се пресметаат основните статистички параметри: аритметичка средина, стандардна девијација, коефициент на варијација, коефициент на асиметрија, екцес итн. Ако вредностите на статистичките параметри (од кои најзначајни се просек и варијанса), за различните поднизи имаат приближно исти вредности, тогаш

процесот е стационарен и над елементите од пробата може да се примени стохастичка анализа.

* * *

Анализа на автокорелација на процесот се прави за да се дефинира автокорелограмот на пробата. Ако две варијабли се меѓусебе линеарно зависни, тогаш коефициентот на корелација ја дефинира мерката на таа зависност. За варијабли кои потекнуваат од иста серија, сериската корелација се утврдува со автокорелациони коефициенти и графички се претставува со автокорелограм. Од автокорелограмот се добиваат следните визуелни заклучоци:

- (1) феномен на перзистенција (меѓусебна поврзаност на сукцесивно подредените членови на временските серии), можеен кај сезонски или пократки временски интервали поради инерцијалноста на протекувањата;
- (2) периодичност (забележлив кај годишните протекувања);
- (3) тренд - или долгорочна тенденција поради човечка активност во сливното подрачје, и
- (4) цикличност - околу трендот, забележлив кај месечните протекувања.

За практична примена на анализата на автокорелација на процесот, историската низа со вкупен број на елементи “N” се дели на две исти поднизи кои се преклопуваат “X” и “Y”. За ($i = 1, N-2$; $N_k = N-i$; $N_p = 1+i$) се добиваат поднизите $X_i \{x \in (1, N_k)\}$ и $Y_i \{y \in (N_p, N)\}$. За двете поднизи се определуваат статистичките параметри:

$$X \in (Q_1, Q_2, \dots, Q_{N_k}) \Rightarrow \bar{X}, \sigma_x \text{ и } Y \in (Q_{N_p}, Q_{N_p+1}, \dots, Q_N) \Rightarrow \bar{Y}, \sigma_y \quad (5.12)$$

Автокорелационите коефициенти ($i = 1, N-2$) се пресметуваат со следниот израз:

$$r_{x,y(i)} = \frac{\frac{1}{N_k} \sum_j (X_j - \bar{X})(Y_j - \bar{Y})}{\sigma_x \sigma_y} \quad (5.13)$$

5.2. Генерирање на годишни протекувања

Генерирањето на синтетички годишни протекувања, со произволна должина, се прави со користење на Маркови ланци. Релацијата за генерирање на $k^{\text{тиот}}$ член од синтетичката серија Q_k со користење на сложен Марков ланец од τ ред (со τ алки) е следната:

$$Q_k = Q(Q_{k-t}; t=1, \tau) = A_k + \phi_k \cdot B \quad (5.14)$$

Првиот собирок од горната релација е детерминистичката компонента, а вториот собирок е стохастичка компонента на генерираното протекување Q_k . Големините A_k и “B” се пресметуваат со следните изрази:

$$A_k = \bar{Q}_i - \sum_{t=1}^{\tau} (Q_{k-t} - \bar{Q}_{i-t}) \frac{\sigma_i D_{i,i-t}}{\sigma_{i-t} D_{i,i}}; \quad B = \sigma_i \sqrt{\frac{D_t}{D_{i,i}}} \quad (5.15)$$

За процесот на годишните протекувања Q_i може да се претпостави дека е стационарен и ергодичен, односно се задоволени релациите:

$$\bar{Q}_i \cong \bar{Q}_{i-t} \cong \bar{Q} \quad \text{и} \quad \sigma_i \cong \sigma_{i-t} \cong \sigma \quad \text{за: } t=1, \tau \quad (5.16)$$

со што се упростуваат изразите за големините A_k и “B” за генерирање на годишни протекувања:

$$A_k = \bar{Q} - \sum_{t=1}^{\tau} (Q_{k-t} - \bar{Q}) \frac{D_{i,i-t}}{D_{i,i}}; \quad B = \sigma \sqrt{\frac{D_{\tau}}{D_{i,i}}} \quad (5.17)$$

Во претходно наведените релации, D_t е детерминанта на квадратна симетрична корелациона матрица:

$$D_t = \begin{vmatrix} r_{i,i} & r_{i,i-t} & \cdots & r_{i,i-\tau} \\ \vdots & r_{i,i} & \cdots & r_{i,i-(\tau-1)} \\ \vdots & & & \\ r_{i,i-\tau} & \cdots & & r_{i,i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & r_1 & \cdots & r_{\tau} \\ \vdots & 1 & \cdots & r_{\tau-1} \\ \vdots & & & \\ r_{\tau} & \cdots & & 1 \end{vmatrix} \quad (5.18)$$

каде што: $r_{i,i-t}$, ($t = 1, \tau$) се автокорелациони коефициенти на низата Q_i , ($i=1,N$). Ако низата Q_i се разложи на:

$$X_i = Q_i \text{ (} i=1, N-t \text{)} \text{ и } Y_i = Q_i \text{ (} i=1+t, N \text{)} \quad (5.19)$$

тогаш коефициентот на корелација меѓу низите X_i и Y_i ќе биде:

$$-1.0 \leq r_{x,y} \leq +1.0 \quad (5.20)$$

кој се пресметува со следниот израз:

$$r_{x,y} = \frac{\frac{1}{N-t} \sum_i^{N-t} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sigma_x \sigma_y} \quad (5.21)$$

$D_{i,i-t}$ е алгебарски комплемент (кофактор); а $M_{i,i-t}$ е минор на D_t , кој се пресметува со следната релација:

$$D_{i,i-t} = (-1)^{(i)+(i-t)} \cdot M_{i,i-t} \quad (5.22)$$

Ако се претпостави дека постои автокорелација само помеѓу 2 последователни членови се добива прост Марков ланец (линеарна зависност на Thomas и Fiering), или Марков ланец со една алка ($\tau = 1$). Изразите за детерминантата на корелационата матрица и алгебарскиот кофактор се:

$$\begin{aligned} D_t &= \begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - r_1^2 \\ D_{i,i-1} = D_{2,1} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & 1 \end{vmatrix} = -r_1 \\ D_{i,i} = D_{2,2} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Коефициентите за Марковиот ланец од прв ред се:

$$A_k = \bar{Q} - (Q_{k-1} - \bar{Q})(-r_1); \quad B = \sigma \sqrt{1 - r_1^2} \quad (5.24)$$

Ако се претпостави дека постои автокорелација помеѓу 3 последователни членови се добива Марков ланец од втор ред (нелинеарна зависност), или Марков ланец со две алки ($\tau = 2$). Детерминантата на корелационата матрица се пресметува со следната релација:

$$D_i = \begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2r_1^2 + 2r_1^2 r_2 - r_2^2 \quad (5.25)$$

Алгебарските комплементи се пресметуваат со следните изрази:

$$\begin{aligned} D_{i,i-2} = D_{3,1} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 1 \end{vmatrix} = r_1^2 - r_2 \\ D_{i,i-1} = D_{3,2} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 1 \end{vmatrix} = -r_1 + r_1 r_2 \\ D_{i,i} = D_{3,3} &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - r_1^2 \end{aligned} \quad (5.26)$$

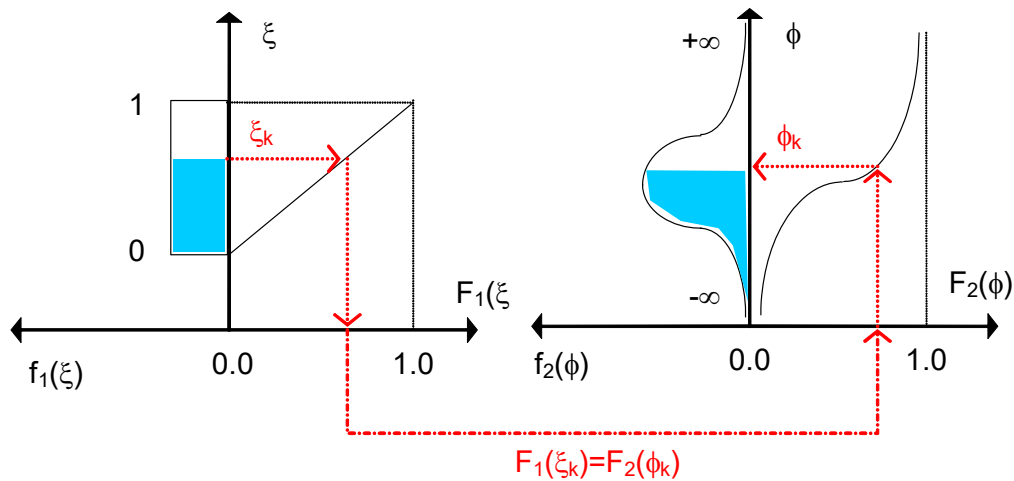
Коефициентите за Марковиот ланец од втор ред се:

$$\begin{aligned} A_k &= \bar{Q} - (Q_{k-1} - \bar{Q}) \frac{-r_1 + r_1 r_2}{1 - r_1^2} - (Q_{k-2} - \bar{Q}) \frac{r_1^2 - r_2}{1 - r_1^2} \\ B &= \sigma \sqrt{\frac{1 - 2r_1^2 + 2r_1^2 r_2 - r_2^2}{1 - r_1^2}} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Случајните броеви ϕ_k , со биномален закон на распределба се добиваат со решавање на следниот интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\phi_k} f_2(\phi) d\phi = F_2(\phi_k) = F_1(\xi_k) = \xi_k \quad (5.28)$$

каде што: ξ_k се случајни броеви, рамномерно распределени во интервалот $[0,1]$, [слика 5.1](#), кои се трансформираат во ϕ_k .



Сл. 5.1. Трансформација на случајни (рандом) броеви ξ_k , рамномерно распределени во интервал $[0,1]$ во случајни броеви ϕ_k според определен закон за дистрибуција на густина на веројатност $f(\phi)$

Пресметувачката постапка (слика 5.1), се состои во три чекори:

- (1) генерирање на рандом броеви ξ_k ;
- (2) изедначување на $\xi_k = F_1(\xi_k) = F_2(\phi_k)$; и
- (3) решавање на наведениот интеграл и определување на ϕ_k .

Во моделот за генерирање на годишните протекувања, случајните броеви ϕ_k најчесто се распределени според PEARSON III закон за дистрибуција, што се изразува со следната релација:

$$\phi_k = \phi(C_{s k}^u, \xi_k); \quad C_{s k}^u = 2B / Ak \quad (5.29)$$

каде: $C_{s k}^u$ е условен коефициент на асиметрија. Со пресметаната вредност на $C_{s k}^u$ во Фостер - Рибкинова табела се бара најблискиот ред и со претходно генерираната вредност на ξ_k , со интерполација, се наоѓа ϕ_k .

5.3. Симулирање на месечни протекувања

При симулирањето на месечните протекувања, треба да се истакни дека за секоја генерирана вредност на годишното протекување Q_k се симулираат соодветни месечни вредности $Q_{k,j}$ (каде $j = 1, 12$ е индикатор за месец). Симулирањето на месечните протекувања се реализира на следниот начин:

- I. Се пресметува множество од “N” бездимензионални фрагменти на месечните протекувања:

$$q_{ij} = Q_{ij} / Q_i; \quad i=1, N; \quad j=1, 12 \quad (5.30)$$

- II. За да се зголеми бројот на фрагментите $N^{\text{те}}$ бездимензионални фрагменти се симулираат “M” пати, (со што се добиваат “N·M” синтетички бездимензионални фрагменти), на следниот начин:

$$q_{i,m,j} = q_{i,j} + q_{i,j} \frac{\xi_j - \bar{\xi}_j}{(a + b\bar{\xi}_j) \sum_{j=1}^{12} \xi_j}; \quad \bar{\xi}_j = \frac{\sum_{j=1}^{12} \xi_j}{12}; \quad (5.31)$$

$$a > 0; \quad b > 0; \quad i = 1, N; \quad m = 1, M; \quad j = 1, 12$$

каде што ξ_j е рандом големина рамномерно распределена во интервал $[0, 1]$, додека “a” и “b” се позитивни константи.

- III. За секоја симулирана вредност на годишното протекување Q_k се избира соодветен синтетички бездимензионален фрагмент q_{i^*, m^*} . Фрагментот q_{i^*, m^*} се избира со почитување на два услови:

- (1) Фрагментот се избира од она “N” множество, чие историско годишно протекување Q_i е најблиско до разгледуваното синтетичко протекување Q_k , што математички може да се формализира со следниот израз:

$$i=1, N \Rightarrow \min |Q_k - Q_i| \Rightarrow i^* = i \quad (5.32)$$

- (2) При избор на еден фрагмент од “M” можни, се избира оној, чие протекување во првиот месец $Q_{k,1}$ (од разгледуваното синтетичко протекување Q_k) има соодветна кореспонденција (според корелациона анализа на месечните протекувања од историската низа) со протекувањата од претходната година $Q_{k,j}$; $j = 12, 11, \dots$. Прво се

пресметува предвиденото месечно протекување за прв месец од разгледуваната година:

$$Q_{k,1} = b_0 + b_1 Q_{k-1,12} + b_2 Q_{k-1,11} + \dots \quad (5.33)$$

Потоа се пресметува предвидената бездимензионална вредност:

$$q_{k,1} = Q_{k,1} / Q_k \quad (5.34)$$

Изборот на соодветниот фрагмент е според следниот израз:

$$m = 1, M \Rightarrow \min |q_{k,1} - q_{i^*,m,1}| \Rightarrow m^* = m \quad (5.35)$$

IV. Со множење на ординатите на избраниот фрагмент q_{i^*,m^*} со вредноста на разгледуваното синтетичко годишно протекување Q_k се добиваат 12 синтетички месечни протекувања за $k^{та}$ симулирана година:

$$Q_{k,j} = q_{i^*,m^*,j} Q_k; j=1,12 \quad (5.36)$$

* * *

Ако со анализите на коефициентите на автокорелација и спектралните функции на појдовната - историска серија и генерираните - синтетички серии (и за годишни и за месечни протекувања), се потврди дека се задржуваат исти особини на натрупување на сушни и водни години, како и исти карактеристики на распределбата на месечните протекувања, тогаш вештачките серии може да се користат во решавањето на управувачките задачи со ВСС, со користење на имплицитниот стохастички пристап.

6. Повеќекритериумска оптимизација

6.1. Вовед во повеќекритериумска оптимизација

Критериумот за оптимизација најчесто е од економска природа, бидејќи се смета дека зголемениот доход (или профит) води кон проширена репродукција, од која зависи општата благосостојба. Дека ова не е точно може да потврди секој кој живеел во средина со забрзан развој на индустријата. Штетните влијанија врз животната средина се најеклатантен пример дека досегашните критериуми за оптимален развој придонесоа за неповолна состојба и влошување на квалитетот на воздухот, водата и почвата. Тоа предизвика промена на концептот за оптимален развој, и од оптимизација според еден критериум, постапно се преоѓа на оптимизација по повеќе критериуми. Така, во примената на повеќекритериумската оптимизација, првиот чекор се состои во идентификација на релевантните критериуми, со кои ќе се опфатат сите главни компоненти на развојот.

Ако постои решение кое истовремено ги максимизира сите критериумски функции, тогаш тоа е оптимално решение на поставената задача. Меѓутоа, такво решение ретко постои за реалните проблеми, па затоа е воведен поимот на неинфериорно решение на проблемите на векторска оптимизација. Во литература се сретнуваат и други термини за неинфериорното решение кај повеќекритериумска оптимизација (ПКО), како на пример: ефикасно, Парето-оптимално¹², доминантно, итн. Решението е неинфериорно ако не постои некое друго решение кое е истовремено подобро по сите критериуми. Со определување на множеството на неинфериорни решенија, всушност се решава математичкиот проблем на одредување на векторскиот максимум. Во реални проблеми, смислата на ПКО, од аспект на теорија на одлучување, се состои во усвојување на едно решение како најдобро, кое ќе се реализира. Затоа во оптимизационата постапка потребно е да се внесе структура на преференција, со која поблиску се дефинираат и формализираат желбите на носителот на одлука и тогаш решението се нарекува супериорно или преферирано оптимално.

Постојат бројни методи за ПКО: (1) методи за одредување на неинфериорни решенија (метода на тежински коефициенти, повеќекритериумска симплекс метода, метода на ограничувања); (2) методи со однапред изразена преференција (метод на повеќе-атрибутна корисност, целно програмирање, метода ELECTRE); (3) интерактивни методи (STEM, SEMOPS); (4) стохастички методи (PROTRADE); (5) компромисно програмирање (има голема примена за решавање на задачи на ПКО кај сложени ВСС).

6.2. Компромисно програмирање

Со компромисното програмирање (КП) се одредува намалено множество на неинфериорни решенија или множество на компромисни решенија. Според С.

¹² Именувано по Vilfredo PARETO, економист од Италија (1848÷1923). Парето оптимално решение е мерка за ефикасност. Ова решение не може да се подобри без притоа да биде оштетен барем еден учесник.

Оприцовиќ, методот се базира на определување на „идеално“ решение во просторот на критериумските функции. Бидејќи идеалното решение е неостварливо, компромисното програмирање се сведува на утврдување на решение кое е „најблиску“ до идеалната точка, кое се нарекува компромисно решение (КР). Како мерка на растојание од идеалната точка се користи одредена метрика, наречена функција на КП. Оваа функција претставува дополнителен критериум на ПКО, бидејќи КР е она решение за кое се остварува минимум на таа функција.

За користење на компромисното програмирање потребно е варијантите да бидат познати во просторот на критериумските функции, односно да биде одредена матрицата $[f_{ij}]$, каде f_{ij} е вредност на $i^{\text{ти}}$ критериум ($i = 1, n$) за $j^{\text{та}}$ варијанта ($j = 1, m$). Критериумите кои се применуваат во оптимизација на водостопанските системи може да се раздвојат на: (1) мерливи, кои може егзактно да се пресметаат за секоја варијанта и по потреба да се прикажат со монетарна вредност, и (2) немерливи, кои не може да се квантифицираат (и следствено не може економски да се валоризираат), но имаат огромно значење за развојот на водните ресурси, и кои се проценуваат според бездимензионална скала на оценки.

Во групата на мерливи критериуми може да бидат:

1. MIN инвестиционо вложување (М€)
2. MIN веројатност на необезбеденост за водоснабдување (%)
3. MAX производство на електрична енергија (GWh/год)
4. MIN веројатност на необезбеденост од поплава (%)
5. MIN експропријација на земјиште (ha)
6. MAX инсталирана снага (MW)
7. MIN експлоатациони трошоци (М€/год)
8. MAX производство на врвна енергија (GWh/год)
9. MIN актуелизирана сегашна вредност на трошоци (М€)
10. MAX актуелизирана сегашна вредност на добивки (М€)
11. MIN веројатност на необезбеденост за наводнување (%)

Во групата на немерливи критериуми, (каде, ако се вреднуваат позитивните влијанија, тогаш критериумот би бил MAX на оценката за скала од „1“ – недоволно, до „5“ – одлично), може да бидат:

1. квалитет на водата
2. услови за рекреација
3. социолошко влијание
4. влијание врз животна средина
5. можност за меѓународна соработка
6. прилагодливост за натамошен развој на системот
7. флексибилност кон опкружувањето
8. влијание на длабочина на акумулација на квалитет на вода
9. дислокација на културно историски споменици

10. раселување на населби

11. потопување на неистражени археолошки локалитети

Кога критериумските функции се хетерогени (разнородни) неопходна е нивна трансформација во бездимензионални функции d_{ij} . Овие бездимензионални функции, со вредности во интервалот $(0 \div 1)$, се добиваат со делење на отстапувањето од најдобрата вредност со должина на интервалот на вредности (пресметана како разлика меѓу „најдобра“ и „најлоша“ вредност на критериумот):

$$d_{ij} = \frac{f_i^+ - f_{ij}}{f_i^+ - f_i^-} \quad (6.1.1)$$

Најдобрата и најлошата вредност на критериумот се пресметуваат со следните условни релации, зависно дали со i -тиот критериум се бара $\max$ или $\min$:

$$\begin{aligned} eks_i = \max &\Rightarrow \begin{cases} f_i^+ = \max_j(f_{ij}) \\ f_i^- = \min_j(f_{ij}) \end{cases} \\ eks_i = \min &\Rightarrow \begin{cases} f_i^+ = \min_j(f_{ij}) \\ f_i^- = \max_j(f_{ij}) \end{cases} \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

Како мерка за растојание на j -та варијанта до идеалната алтернатива се воведува следната метрика, која се нарекува функција на компромисно програмирање:

$$R_{(j,p)} = \begin{cases} \left\{ \sum_{i=1}^n (d_{ij})^p \right\}^{1/p}; & 1 \leq p < \infty \\ \max_i(d_{ij}); & p = \infty \end{cases}; \quad j = 1, m \quad (6.2)$$

Решението на компромисното програмирање е минимизација на отстапувањето од идеалната варијанта, вклучувајќи ги сите критериуми:

$$R_{(p)} = \min_j R_{(j,p)} \quad (6.3)$$

Параметарот “ p ” има улога на „балансирачки фактор“ помеѓу групна корисност ($p=1$, стратегија на мнозинство) и максимално индивидуално отстапување ($p=\infty$, стратегија на консензус). Со задавање на повеќе вредности на “ p ” се добива смалено множество на неинфериорни алтернативи (подмножество на множеството на алтернативи во просторот на критериумските функции), со што е решен проблемот на повеќекритериумската оптимизација.

Доносителот на одлуката може да задава и менува тежини на одделни критериуми w_i за анализа на чувствителноста на решението. Тогаш резултантната критериумска функција на компромисното програмирање го добива следниот облик:

$$R_{(j,p,w)} = \begin{cases} \left\{ \sum_{i=1}^n (t_i \cdot d_{ij})^p \right\}^{1/p} & ; \quad 1 \leq p < \infty \\ \max_i (t_i \cdot d_{ij}) & ; \quad p = \infty \end{cases} \quad j = 1, m \quad (6.4)$$

каде t_i се нормализирани вредности на тежините:

$$t_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}; \quad i = 1, n \quad \left(\begin{array}{l} 0.0 \leq t_i \leq 1.0 \\ \sum_{i=1}^n t_i = 1.0 \end{array} \right) \quad (6.5)$$

За да се намали субјективното влијание на тежинските коефициенти може да се користи ентропијата при определувањето на мерката на значајност на критериумот, со користење на следните релации:

$$R_{(j,p,w)} = \begin{cases} \left\{ \sum_{i=1}^n (a_i \cdot d_{ij})^p \right\}^{1/p} & ; \quad 1 \leq p < \infty \\ \max_i (a_i \cdot d_{ij}) & ; \quad p = \infty \end{cases} \quad j = 1, m \quad (6.6)$$

$$a_i = \frac{w_i \cdot b_i}{\sum_{i=1}^n (w_i \cdot b_i)}; i = 1, n \quad \left(\begin{array}{l} 0.0 \leq a_i \leq 1.0 \\ \sum_{i=1}^n a_i = 1.0 \end{array} \right) \quad (6.7)$$

$$b_i = \frac{1 - e_i}{n - \sum_{i=1}^n e_i} \quad (6.8)$$

$$e_i = \frac{1}{\ln m \cdot \sum_{j=1}^m d_{ij}^{\text{mod}}} \quad (6.9)$$

$$d_{ij}^{\text{mod}} = \frac{d_{ij}}{\sum_{j=1}^m d_{ij}} \cdot \ln \left(\frac{d_{ij}}{\sum_{j=1}^m d_{ij}} \right) \quad (6.10)$$

Каде што:

a_i е мерка за релативна значајност на $i^{\text{ти}}$ критериум,

b_i е мерка за непроменливост на $i^{\text{ти}}$ критериум во однос на неговата идеална вредност, и

e_i е нормализирана мерка на ентропија на $i^{\text{ти}}$ критериум

d_{ij}^{mod} се модифицирани бездимензионални коефициенти

6.3. Итеративно компромисно рангирање

Смислата на повеќекритериумското рангирање на претходно оптимизирани варијанти е во тоа да се смали просторот на одлучување на доносителот на

одлука и квантифицирано да му се претстават фактите кои се релевантни за донесување на одлука.

Методот на итеративно компромисно рангирање ги користи граничните форми на метриката што се користи кај компромисното програмирање.

$$\left. \begin{aligned} S_{(j,w)} = S_j = \sum_{i=1}^n (t_i \cdot d_{ij}) &\Leftrightarrow p = 1 \\ P_{(j,w)} = P_j = \max_i (t_i \cdot d_{ij}) &\Leftrightarrow p = \infty \end{aligned} \right\} j = 1, m \quad (6.11.1)$$

Најлошите, или максимални вредности (S^- , P^-) и најдобрите или минимални вредности (S^+ , P^+) од граничните форми (од релација 6.1.11) се пресметуваат со следните изрази:

$$\begin{aligned} S^+ &= \min_j (S_j) & S^- &= \max_j (S_j) \\ P^+ &= \min_j (P_j) & P^- &= \max_j (P_j) \end{aligned} \quad (6.11.2)$$

Повеќекритериумското рангирање се прави врз основа на мерката изразена со следната релација:

$$Q_{(j,w,v)} = Q_j = v \cdot \frac{S_j - S^+}{S^- - S^+} + (1-v) \cdot \frac{P_j - P^+}{P^- - P^+}; \quad j = 1, m \quad (6.12)$$

Рангирањето според наведената метрика претставува минимизација:

$$Q_{(w,v)} = \min_j (Q_j) \quad (6.13)$$

Со почетната итерација се добиваат најдобрата и најлошата алтернатива во конечната ранг листа, а во натамошниот итеративен циклус се повторува компромисното рангирање без нив (за да се избегне нивното влијание врз позициите на преостанатите варијанти).

При моделирање на преференцијата на доносителот на одлуката, со оваа метода се овозможува:

- (1) вклучување на тежини на одделни критериуми (w_i , $i=1, n$), и
- (2) задавање на тежина на стратегија на одлучување, ($v = 0 \div 1$), со кој се влијае на изборот на стратегијата на задоволување на критериумите.

Ако доносителот на одлука сака да даде предност на задоволувањето на повеќето критериуми (без разлика што во тој случај некој критериум би бил лошо исполнет), тогаш се избира $v > 0.5$ и се потенцира *стратегија на групна корист*. Ако се избери вредност $v < 0.5$, тогаш доносителот на одлука се определил за *стратегија на консензус*, каде и по цена на помала групна корист не се дозволува преголемо незадоволство по било кој критериум.

6.4. Задача – избор на оптимална конфигурација на сложен ВСС

За задоволување на потребите на водокорисниците, идентификувани се пет варијанти за развој на водните ресурси во анализираниот регион. Со примена на концептот на повеќекритериумска оптимизација (ПКО) потребно е да се избере

оптимална конфигурација на сложениот водостопански систем. Влезни податоци за оваа оптимизациона задача се систематизирани во [табелите 6.1.1÷ 6.1.4.](#)

Таб. 6.1.1. Општи податоци за оптимизационата анализа

m_v=	5	број на варијанти (j = 1, m_v)
n_k=	12	број на критериуми (i = 1, n_k)
n_p=	4	број на балансирачки фактори
v_s=	0.7	стратегија на управување
ind =	(0,1)	индикатор за критериум (min=0, max=1)
w =	[1.0 - 2.0]	тежина на критериум
o=	[1 - 5]	бездимензионални оценки (1=слабо, 5=одлично)

Таб. 6.1.2. Варијанти за конфигурацијата на ВСС

V	варијанта за конфигурација на ВСС
1	повеќеенаменски акумулации и канали
2	зафати од река и пумпни станици
3	акумулации во ниски предели
4	акумулации во високи предели
5	подземен водоносен слој - бунари и пумпи

Таб. 6.1.3. Критериуми применети во оптимизационата постапка

K	дим	опис на критериум	оптимум	w
1	M\$	инвестиционо вложување	min	1.0
2	%	веројатност на необезбеденост за водоснабдување	min	2.0
3	ocenka	квалитет на водата	max	1.0
4	GWh	производство на електрична енергија	max	1.0
5	ocenka	рекреација	max	1.0
6	%	веројатност на необезбеденост од поплава	min	2.0
7	ha	експропријација на земјиште	min	1.0
8	ocenka	социолошко влијание	max	1.0
9	ocenka	влијание врз животна средина	max	1.0
10	ocenka	влијание на меѓународна соработка	max	1.0
11	ocenka	можност за натамошен развој на системот	max	1.0
12	ocenka	флексибилност кон опкружувањето	max	1.0

Таб. 6.1.4. Матрица на вредности на критериумите по разгледуваните варијанти

K \ V	1	2	3	4	5
1	96.6	85.7	101.1	95.1	101.8
2	4.0	19.0	50.0	50.0	50.0
3	4.0	3.0	1.0	4.0	2.0
4	0.7	0.5	0.0	0.1	0.0
5	4.0	3.0	2.0	1.0	1.0
6	1.0	0.5	1.5	0.5	2.0
7	90.0	80.0	80.0	60.0	70.0
8	3.0	3.0	2.0	1.0	1.0
9	4.0	3.0	1.0	3.0	2.0
10	4.0	3.0	2.0	1.0	2.0
11	4.0	3.0	2.0	1.0	2.0
12	3.0	3.0	1.0	2.0	1.0

* * *

Решението на поставената оптимизациона задача се состои во следните чекори:

(1) НАЈДОБРА И НАЈЛОША ВРЕДНОСТ НА КРИТЕРИУМИТЕ

Најдобрата и најлошата вредност на критериумот се пресметани со користење на изразот 6.1.2.

Таб. 6.2.1. Најдобра (Best) и најлоша (Worst) вредност на критериумите

K	оптимум	ind	Worst	Best	B-W
1	min	0	101.8	85.7	-16.1
2	min	0	50.0	4.0	-46.0
3	max	1	1	4	3
4	max	1	0.01	0.7	0.69
5	max	1	1	4	3
6	min	0	2.0	0.5	-1.5
7	min	0	90.0	60.0	-30.0
8	max	1	1	3	2
9	max	1	1	4	3
10	max	1	1	4	3
11	max	1	1	4	3
12	max	1	1	3	2

(2) МАТРИЦА НА БЕЗДИМЕНЗИОНАЛНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Матрицата на бездимензионални коефициенти се пресметува со користење на изразот 6.1.1, влезните податоци од матрицата на критериумите по варијанти

(табела 6.1.4) и вредностите за најдобрата и најлошата вредност на критериумот (табела 6.2.1).

Таб. 6.2.2. Матрица на бездимензионални коефициенти

K/V	1	2	3	4	5
1	0.6770	0.0000	0.9565	0.5839	1.0000
2	0.0000	0.3261	1.0000	1.0000	1.0000
3	0.0000	0.3333	1.0000	0.0000	0.6667
4	0.0000	0.2899	1.0000	0.8696	1.0000
5	0.0000	0.3333	0.6667	1.0000	1.0000
6	0.3333	0.0000	0.6667	0.0000	1.0000
7	1.0000	0.6667	0.6667	0.0000	0.3333
8	0.0000	0.0000	0.5000	1.0000	1.0000
9	0.0000	0.3333	1.0000	0.3333	0.6667
10	0.0000	0.3333	0.6667	1.0000	0.6667
11	0.0000	0.3333	0.6667	1.0000	0.6667
12	0.0000	0.0000	1.0000	0.5000	1.0000

(3) ФУНКЦИЈА НА КОМПРОМИСНО ПРОГРАМИРАЊЕ

Функцијата на компромисното програмирање се пресметува со изразот 6.2, и резултатите за бездимензионалните коефициенти (табела 6.2.2). За вредност на балансирачкиот фактор $p = 1$, се добива следната матрица:

Таб. 6.2.3.1. Функцијата на компромисното програмирање за $p = 1$

K/V	1	2	3	4	5
1	0.677	0.000	0.957	0.584	1.000
2	0.000	0.326	1.000	1.000	1.000
3	0.000	0.333	1.000	0.000	0.667
4	0.000	0.290	1.000	0.870	1.000
5	0.000	0.333	0.667	1.000	1.000
6	0.333	0.000	0.667	0.000	1.000
7	1.000	0.667	0.667	0.000	0.333
8	0.000	0.000	0.500	1.000	1.000
9	0.000	0.333	1.000	0.333	0.667
10	0.000	0.333	0.667	1.000	0.667
11	0.000	0.333	0.667	1.000	0.667
12	0.000	0.000	1.000	0.500	1.000
R=	2.010	2.949	9.790	7.287	10.000

За вредност на балансирачкиот фактор $p = 2$, се добива следната матрица:

Таб. 6.2.3.2. Функцијата на компромисното програмирање за $p = 2$

K/V	1	2	3	4	5
1	0.458	0.000	0.915	0.341	1.000
2	0.000	0.106	1.000	1.000	1.000
3	0.000	0.111	1.000	0.000	0.444
4	0.000	0.084	1.000	0.756	1.000
5	0.000	0.111	0.444	1.000	1.000
6	0.111	0.000	0.444	0.000	1.000
7	1.000	0.444	0.444	0.000	0.111
8	0.000	0.000	0.250	1.000	1.000
9	0.000	0.111	1.000	0.111	0.444
10	0.000	0.111	0.444	1.000	0.444
11	0.000	0.111	0.444	1.000	0.444

12	0.000	0.000	1.000	0.250	1.000
R=	1.253	1.091	2.896	2.541	2.981

За вредност на балансирачкиот фактор $p = 3$, се добива следната матрица:

Таб. 6.2.3.3. Функцијата на компромисното програмирање за $p = 3$

K/V	1	2	3	4	5
1	0.310	0.000	0.875	0.199	1.000
2	0.000	0.035	1.000	1.000	1.000
3	0.000	0.037	1.000	0.000	0.296
4	0.000	0.024	1.000	0.658	1.000
5	0.000	0.037	0.296	1.000	1.000
6	0.037	0.000	0.296	0.000	1.000
7	1.000	0.296	0.296	0.000	0.037
8	0.000	0.000	0.125	1.000	1.000
9	0.000	0.037	1.000	0.037	0.296
10	0.000	0.037	0.296	1.000	0.296
11	0.000	0.037	0.296	1.000	0.296
12	0.000	0.000	1.000	0.125	1.000
R=	1.104	0.815	1.956	1.819	2.018

За вредност на балансирачкиот фактор $p = 4$, се добива следната матрица:

Таб. 6.2.3.4. Функцијата на компромисното програмирање за $p = 4$

K/V	1	2	3	4	5
1	0.210	0.000	0.837	0.116	1.000
2	0.000	0.011	1.000	1.000	1.000
3	0.000	0.012	1.000	0.000	0.198
4	0.000	0.007	1.000	0.572	1.000
5	0.000	0.012	0.198	1.000	1.000
6	0.012	0.000	0.198	0.000	1.000
7	1.000	0.198	0.198	0.000	0.012
8	0.000	0.000	0.063	1.000	1.000
9	0.000	0.012	1.000	0.012	0.198
10	0.000	0.012	0.198	1.000	0.198
11	0.000	0.012	0.198	1.000	0.198
12	0.000	0.000	1.000	0.063	1.000
R=	1.051	0.726	1.620	1.549	1.671

За вредност на балансирачкиот фактор $p = \infty$, согласно на вториот дел од [изразот 6.2](#), се добиваат вредностите:

Таб. 6.2.3.5. Функцијата на компромисното програмирање за $p = \infty$

V	1	2	3	4	5
R =	1.000	0.667	1.000	1.000	1.000

(4) РЕШЕНИЕ НА КОМПРОМИСНОТО ПРОГРАМИРАЊЕ

Решението на компромисното програмирање (КП) е минимизација на отстапувањето од идеалната варијанта, вклучувајќи ги сите критериуми, според [релацијата 6.3](#). Вредностите на функцијата на компромисно програмирање за различни вредности на балансирачкиот фактор се систематизирани во следната табела, каде минималните вредности се болдирани.

Таб. 6.2.4. Решение на компромисно програмирање за $p = 1, 2, 3, 4, \infty$

p =	V	1	2	3	4	5
1		2.010	2.949	9.790	7.287	10.000

2		1.253	1.091	2.896	2.541	2.981
3		1.104	0.815	1.956	1.819	2.018
4		1.051	0.726	1.620	1.549	1.671
∞		1.000	0.667	1.000	1.000	1.000

Од решението на КП се забележува влијанието на параметарот “ p ”, кој ја има улогата на „балансирачки фактор“ помеѓу групна корисност ($p = 1$, стратегија на мнозинство) и максимално индивидуално отстапување ($p = \infty$, стратегија на консензус). За поставената оптимизациона задача, со задавање на повеќе вредности на “ p ” се добива смалено множество на неинфериорни алтернативи (подмножество на множеството на варијанти), кое е составено од варијантите бр. 1 и бр. 2. Со тоа е решен проблемот на повеќекритериумската оптимизација, а конечниот избор помеѓу овие две варијанти зависи од преференцијата на „Донесителот на одлуката“ по однос на стратегиите – мнозинство или консензус.

(5) ЧУВСТВИТЕЛНОСТ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАДЕНИ ТЕЖИНИ НА КРИТЕРИУМИТЕ

Доколку се искористат тежините на одделните критериуми, дадени во [табела 6.1.3](#), тогаш нормализираните вредности на тежините се пресметуваат со [релацијата 6.5](#).

Таб. 6.2.5. Нормализирани вредности на тежините на критериумите

K	w	t
1	1.0	0.0714
2	2.0	0.1429
3	1.0	0.0714
4	1.0	0.0714
5	1.0	0.0714
6	2.0	0.1429
7	1.0	0.0714
8	1.0	0.0714
9	1.0	0.0714
10	1.0	0.0714
11	1.0	0.0714
12	1.0	0.0714
sum	14.0	1.0000

Матрицата на бездимензионални коефициенти со влијанието на тежините се пресметува со множење на нормализираните вредности на тежините на критериумите ([табела 6.2.5](#)) со матрицата на бездимензионални коефициенти ([табела 6.2.2](#)).

Таб. 6.2.6. Матрица на бездимензионални коефициенти со влијание на тежини

K/V	1	2	3	4	5
1	0.0484	0.0000	0.0683	0.0417	0.0714
2	0.0000	0.0466	0.1429	0.1429	0.1429
3	0.0000	0.0238	0.0714	0.0000	0.0476
4	0.0000	0.0207	0.0714	0.0621	0.0714
5	0.0000	0.0238	0.0476	0.0714	0.0714
6	0.0476	0.0000	0.0952	0.0000	0.1429
7	0.0714	0.0476	0.0476	0.0000	0.0238
8	0.0000	0.0000	0.0357	0.0714	0.0714
9	0.0000	0.0238	0.0714	0.0238	0.0476
10	0.0000	0.0238	0.0476	0.0714	0.0476

11	0.0000	0.0238	0.0476	0.0714	0.0476
12	0.0000	0.0000	0.0714	0.0357	0.0714

Функцијата на компромисното програмирање со влијанието на тежините се пресметува со [изразот](#) 6.4, и вредностите за бездимензионалните коефициенти со тежини (табела 6.2.6). За вредност на балансирачкиот фактор $p = 1$, се добива следната матрица:

Таб. 6.2.7. Функцијата на компромисното програмирање (со тежини) за $p = 1$

K/V	1	2	3	4	5
1	0.048	0.000	0.068	0.042	0.071
2	0.000	0.047	0.143	0.143	0.143
3	0.000	0.024	0.071	0.000	0.048
4	0.000	0.021	0.071	0.062	0.071
5	0.000	0.024	0.048	0.071	0.071
6	0.048	0.000	0.095	0.000	0.143
7	0.071	0.048	0.048	0.000	0.024
8	0.000	0.000	0.036	0.071	0.071
9	0.000	0.024	0.071	0.024	0.048
10	0.000	0.024	0.048	0.071	0.048
11	0.000	0.024	0.048	0.071	0.048
12	0.000	0.000	0.071	0.036	0.071
R=	0.167	0.234	0.818	0.592	0.857

После определувањето на функцијата на КП за $p = 2, 3, 4, \infty$, се добива решението на КП, според [релацијата](#) 6.3. Вредностите на функцијата на компромисно програмирање со влијание на тежините по критериумите, за различни вредности на балансирачкиот фактор, се систематизирани во следната табела, каде минималните вредности се болдирани.

Таб. 6.2.8. Решение на КП со влијание на тежини, за $p = 1, 2, 3, 4, \infty$

p=	V	1	2	3	4	5
1		0.167	0.234	0.818	0.592	0.857
2		0.099	0.088	0.255	0.220	0.276
3		0.084	0.066	0.182	0.168	0.201
4		0.078	0.058	0.159	0.152	0.177
∞		0.071	0.048	0.143	0.143	0.143

Со споредба на резултатите од [табела](#) 6.2.4 (без тежини) и [табела](#) 6.2.8 (со тежини), може да се заклучи дека внесувањето на тежините за критериумите не предизвикува промена на редуцираното множество на неинфериорни алтернативи. Имено, доколку се земе предвид влијанието од тежините ова подмножество повторно е составено од варијантите бр. 1 и бр. 2.

(6) ЧУВСТВИТЕЛНОСТ НА РЕШЕНИЕТО СО АНАЛИЗА НА ЕНТРОПИЈАТА

За да се намали субјективното влијание на тежинските коефициенти може да се користи ентропијата при определувањето на мерката на значајност на критериумот. Со користење на [релацијата](#) 6.10, и вредностите на матрицата на бездимензионални коефициенти ([табела](#) 6.2.2) се пресметуваат модифицираните бездимензионални коефициенти. Во оваа пресметка, доколку $d_{ij} = 0.0$, се заменува со $d_{ij} = 1.0 \cdot 10^{-10}$.

Таб. 6.2.9. Модифицирани бездимензионални коефициенти

sum dij	K/V	1	2	3	4	5
3.217	1	-3.280E-01	-7.520E-10	-3.606E-01	-3.097E-01	-3.632E-01
3.326	2	-7.284E-10	-2.277E-01	-3.613E-01	-3.613E-01	-3.613E-01
2.000	3	-1.186E-09	-2.986E-01	-3.466E-01	-1.186E-09	-3.662E-01
3.159	4	-7.652E-10	-2.192E-01	-3.641E-01	-3.551E-01	-3.641E-01
3.000	5	-8.041E-10	-2.441E-01	-3.342E-01	-3.662E-01	-3.662E-01
2.000	6	-2.986E-01	-1.186E-09	-3.662E-01	-1.186E-09	-3.466E-01
2.667	7	-3.678E-01	-3.466E-01	-3.466E-01	-9.003E-10	-2.599E-01
2.500	8	-9.577E-10	-9.577E-10	-3.219E-01	-3.665E-01	-3.665E-01
2.333	9	-1.023E-09	-2.780E-01	-3.631E-01	-2.780E-01	-3.579E-01
2.667	10	-9.003E-10	-2.599E-01	-3.466E-01	-3.678E-01	-3.466E-01
2.667	11	-9.003E-10	-2.599E-01	-3.466E-01	-3.678E-01	-3.466E-01
2.500	12	-9.577E-10	-9.577E-10	-3.665E-01	-3.219E-01	-3.665E-01

Потоа се пресметува: e_i нормализирана мерка на ентропија на $i^{\text{ти}}$ критериум (релација 6.9), b_i мерка за непроменливост на $i^{\text{ти}}$ критериум во однос на неговата идеална вредност (релација 6.8), и a_i мерка за релативна значајност на $i^{\text{ти}}$ критериум (релација 6.7). Резултатите од пресметките се дадени во следната табела 6.2.10.

Таб. 6.2.10. Нормализирани вредности на тежините на критериумите со ентропија

K/V	e	b	w	b*w	a
1	-0.45636	0.08008	1.0	0.080	0.06846
2	-0.47370	0.08104	2.0	0.162	0.13855
3	-0.61433	0.08877	1.0	0.089	0.07588
4	-0.47704	0.08122	1.0	0.081	0.06943
5	-0.47402	0.08105	1.0	0.081	0.06929
6	-0.61433	0.08877	2.0	0.178	0.15177
7	-0.47039	0.08086	1.0	0.081	0.06912
8	-0.58899	0.08738	1.0	0.087	0.07469
9	-0.48655	0.08174	1.0	0.082	0.06988
10	-0.47039	0.08086	1.0	0.081	0.06912
11	-0.47039	0.08086	1.0	0.081	0.06912
12	-0.58899	0.08738	1.0	0.087	0.07469
sum =	-6.18547			1.170	1.00000

Матрицата на бездимензионални коефициенти со влијанието на тежините и ентропијата се пресметува со множење на нормализираните вредности на тежините на критериумите со ентропија (табела 6.2.10) со матрицата на бездимензионални коефициенти (табела 6.2.2).

Таб. 6.2.11. Матрица на бездимензионални коефициенти со влијание на тежини и ентропија

K/V	1	2	3	4	5
1	0.0463	0.0000	0.0655	0.0400	0.0685
2	0.0000	0.0452	0.1385	0.1385	0.1385
3	0.0000	0.0253	0.0759	0.0000	0.0506
4	0.0000	0.0201	0.0694	0.0604	0.0694
5	0.0000	0.0231	0.0462	0.0693	0.0693
6	0.0506	0.0000	0.1012	0.0000	0.1518
7	0.0691	0.0461	0.0461	0.0000	0.0230

8	0.0000	0.0000	0.0373	0.0747	0.0747
9	0.0000	0.0233	0.0699	0.0233	0.0466
10	0.0000	0.0230	0.0461	0.0691	0.0461
11	0.0000	0.0230	0.0461	0.0691	0.0461
12	0.0000	0.0000	0.0747	0.0373	0.0747

Функцијата на компромисното програмирање со влијанието на тежините (со ентропија) се пресметува со [изразот](#) 6.6, и вредностите за бездимензионалните коефициенти со тежини и ентропија ([табела](#) 6.2.11). За вредност на балансирачкиот фактор $p = 1$, се добива следната матрица:

Таб. 6.2.12. Функција на компромисното програмирање (со тежини и ентропија) за фактор ($p = 1$)

K/V	1	2	3	4	5
1	0.046	0.000	0.065	0.040	0.068
2	0.000	0.045	0.139	0.139	0.139
3	0.000	0.025	0.076	0.000	0.051
4	0.000	0.020	0.069	0.060	0.069
5	0.000	0.023	0.046	0.069	0.069
6	0.051	0.000	0.101	0.000	0.152
7	0.069	0.046	0.046	0.000	0.023
8	0.000	0.000	0.037	0.075	0.075
9	0.000	0.023	0.070	0.023	0.047
10	0.000	0.023	0.046	0.069	0.046
11	0.000	0.023	0.046	0.069	0.046
12	0.000	0.000	0.075	0.037	0.075
R=	0.166	0.229	0.817	0.582	0.859

После определувањето на функцијата на КП за $p = 2, 3, 4, \infty$, се добива решението на КП, според [релацијата](#) 6.3. Вредностите на функцијата на компромисно програмирање со влијание на тежините и ентропијата по критериумите, за различни вредности на балансирачкиот фактор, се систематизирани во следната табела, каде минималните вредности се болдирани.

Таб. 6.2.13. Решение на КП со влијание на тежини и ентрипија, за $p = 1, 2, 3, 4, \infty$

p=	V	1	2	3	4	5
1		0.166	0.229	0.817	0.582	0.859
2		0.097	0.086	0.254	0.215	0.278
3		0.082	0.064	0.181	0.164	0.203
4		0.076	0.057	0.158	0.149	0.180
max		0.069	0.046	0.139	0.139	0.152

Со споредба на резултатите од [табела](#) 6.2.13 (без тежини и ентропија) и [табела](#) 6.2.8 (со тежини), може да се заклучи дека внесувањето на ентропијата на тежините за критериумите не предизвикува промена на редуцираното множество на неинфериорни алтернативи. Имено, доколку се земе предвид влијанието од ентропијата на тежините ова подмножество повторно е составено од варијантите бр. 1 и бр. 2.

(7) ПРОВЕРКА НА РЕШЕНИЕТО СО ИТЕРАТИВНО КОМПРОМИСНО РАНГИРАЊЕ

Во првата итерација на методот на итеративно компромисно рангирање (ИКР) се користи [релацијата](#) 6.11.1, и доколку се земе предвид и влијанието од тежините на критериумите, тогаш се применуваат вредностите од матрицата на бездимензионални коефициенти со влијание на тежините ([табела](#) 6.2.6).

Граничните форми на метриката на КП се дадени во следната табела:

Таб. 6.2.14. Гранични форми на метриката за првата итерација од ИКР

	V	1	2	3	4	5
P=	max	0.071	0.048	0.143	0.143	0.143
S=	sum	0.167	0.234	0.818	0.592	0.857

Понатаму се пресметуваат најлошите или максималните вредности (S^- , P^-) и најдобрите или минималните вредности (S^+ , P^+) од граничните форми (табела 6.2.14), согласно со релацијата 6.11.2. Доколку вредностите на најлошите се еднакви на најдобрите, тогаш најлошите (максималните) се зголемуваат за вредност приближно еднаква на нула $1.0 \cdot 10^{-10}$, и се добиваат корегираниите најлоши вредности (S'^- , P'^-), со кои се извршуваат следните пресметки:

Таб. 6.2.15. Најлоши и најдобри вредности на граничните форми на метриката за првата итерација од ИКР

$S(+)=$	0.167	$P(+)=$	0.048
$S(-)=$	0.857	$P(-)=$	0.143
$S'(-)=$	0.857	$P'(-)=$	0.143

Повеќекритериумското рангирање се прави врз основа на мерката на ИКР изразена со релацијата 6.12, а рангирањето на варијантите е според релацијата 6.13.

Таб. 6.2.16. Рангирање на варијантите во првата итерација од ИКР

рангирање	varijanta	Q(v)=
1	2	0.068
2	1	0.075
3	4	0.731
4	3	0.961
5	5	1.000

* * *

Со првата итерација се добиваат најдобрата (варијанта бр. 2) и најлошата (варијанта бр. 5), во конечната ранг листа, а во вториот итеративен циклус се повторува компромисното рангирање без нив, за да се избегне нивното влијание врз позициите на преостанатите варијанти.

* * *

Во втората итерација на методот на итеративно компромисно рангирање (ИКР) се користи релацијата 6.11.1, и доколку се земе предвид и влијанието од тежините на критериумите, тогаш се применуваат вредностите од матрицата на бездимензионални коефициенти со влијание на тежините, каде што не партиципираат исклучените варијанти од првата итерација (табела 6.2.18).

Таб. 6.2.17. Најдобра (Best) и најлоша (Worst) вредност на критериумите, со исклучени варијанти бр. 2 и бр. 5

K	Worst	Best	B-W
1	101.1	95.1	-6
2	50	4	-46
3	1	4	3
4	0.01	0.7	0.69
5	1	4	3
6	1.5	0.5	-1

7	90	60	-30
8	1	3	2
9	1	4	3
10	1	4	3
11	1	4	3
12	1	3	2

Таб. 6.2.18. Матрица на бездимензионални коефициенти со влијание на тежини со исклучени варијанти бр. 2 и бр. 5

K/V	1	2	3	4	5
1	0.0179		0.0714	0.0000	
2	0.0000		0.1429	0.1429	
3	0.0000		0.0714	0.0000	
4	0.0000		0.0714	0.0621	
5	0.0000		0.0476	0.0714	
6	0.0714		0.1429	0.0000	
7	0.0714		0.0476	0.0000	
8	0.0000		0.0357	0.0714	
9	0.0000		0.0714	0.0238	
10	0.0000		0.0476	0.0714	
11	0.0000		0.0476	0.0714	
12	0.0000		0.0714	0.0357	

Граничните форми на метриката на КП се дадени во следната табела:

Таб. 6.2.19. Гранични форми на метриката за втората итерација од ИКР

V	1	2	3	4	5
P=	max	0.071		0.143	0.143
S=	sum	0.161		0.869	0.550

Понатаму се пресметуваат најлошите или максималните вредности (S^- , P^-) и најдобрите или минималните вредности (S^+ , P^+) од граничните форми (табела 6.2.19), согласно со релацијата 6.11.2. Доколку вредностите на најлошите се еднакви на најдобрите, тогаш најлошите (максималните) се зголемуваат за вредност приближно еднаква на нула $1.0 \cdot 10^{-10}$, и се добиваат корегираниите најлоши вредности (S'^- , P'^-), со кои се извршуваат следните пресметки:

Таб. 6.2.20. Најлоши и најдобри вредности на граничните форми на метриката за втората итерација од ИКР

$S(+)=$	0.161	$P(+)=$	0.071
$S(-)=$	0.869	$P(-)=$	0.143
$S'(-)=$	0.869	$P'(-)=$	0.143

Повеќекритериумското рангирање се прави врз основа на мерката на ИКР изразена со релацијата 6.12, а рангирањето на варијантите е според релацијата 6.13.

Таб. 6.2.21. Рангирање на варијантите во втората итерација од ИКР

рангирање	varijanta	Q(v)=
2	1	0.000
3	4	0.685
4	3	1.000

* * *

Со втората итерација се добиваат најдобрата (варијанта бр. 1) и најлошата (варијанта бр. 3), во ранг листата од (2) до (4), со што може да се комплетира

конечната ранг листа на варијантите за предметнава оптимизациона анализа со примена на методот на ИКР, со зададена стратегија на управување $v = 0.7$, со што се дава предност на стратегијата на групна корист.

Таб. 6.2.22. Конечна ранг листа на варијантите добиена со методот на ИКР за стратегија на управување $v = 0.7$

рангирање	varijanta
1	2
2	1
3	4
4	3
5	5

7. Теорија на фази множества

7.1. Увод во теорија на фази множества

Проблемот на несоодветност или разминување на реалниот систем со математичкиот модел е еден од централните проблеми на модерната наука. Albert Einstein има забележано дека “Колку што законите на математичарите се поблиски до реалноста толку се тие понеизвесни, и обратно, колку се тие поизвесни толку не одговараат на реалноста или се оддалечуваат од неа”, (Kosko, 1994). Од една страна постои реален свет во нијанси на сиво (неодреден - фази свет), а од друга страна вештачки црно-бел свет на науката (јасна - нефазни дескрипција). Суштината на оваа разлика е дека тврдењата во формалната логика се вистинити или лажни, (изрази со вредност на вистинитост 1.0 или 0.0), а вистинитоста во реалноста е во интервалот од 0.0 до 1.0. Доказите во логиката се разликуваат од тестовите во науката. Ако се докажи некој исказ со 100% вистинитост тој не ја опишува реалноста и обратно. Звучи иронично, но „неточноста“ е централното присвојување на науката. Имено, нема ни една научна хипотеза, теорија или исказ кој е 100% точен. Научниците се обидуваат да прават математички модели кои најдобро одговараат на реалниот проблем и почнуваат безусловно да и’ веруваат на математиката кога се бават со наука. За жал, тогаш првата жртва е вистината.

Конвенционалните логичари и филозофи го апроксимираа реалниот свет како бивалентен, и ја користеа истата симболичка логика која ја поставил Аристотел¹³ пред повеќе од 2,000 години. Оваа двовалентна логика се состои во **А или не-А**, каде што “А” претставува некое тврдење или исказ, односно 0 - лажно или 1 - вистинито. Бидејќи системите стануваа посложени и понеодредени, за совладување на неизвесноста, беше создадена науката Теорија на веројатност. Теоријата на веројатноста е првиот математички формализам за испитување на проблемите во врска со нејасност, неопределеност и неизвесност. Основната идеја на Теоријата на веројатноста или Теоријата на шанса е дека секоја случајна големина има придружен број. Тој придружен број е веројатност дека случајот ќе се забележи, при што збирот од веројатностите, дека ќе се случи

¹³ Aristotle (Greek: Ἀριστοτέλης, Aristotélēs) (384 BC – 322 BC) was a Greek philosopher, a student of Plato and teacher of Alexander the Great. His writings cover many subjects, including physics, metaphysics, poetry, theater, music, logic, rhetoric, politics, government, ethics, biology, and zoology. Together with Plato and Socrates (Plato's teacher), Aristotle is one of the most important founding figures in Western philosophy. Aristotle's writings constitute a first at creating a comprehensive system of Western philosophy, encompassing morality and aesthetics, logic and science, politics and metaphysics. His works contain the earliest known formal study of logic, which was incorporated in the late nineteenth century into modern formal logic. First-order logic is a particular formal system of logic. Its syntax involves only finite expressions as well-formed formulas, while its semantics are characterized by the limitation of all quantifiers to a fixed domain of discourse.

и дека нема да се случи, е еднаков на 1.0. Битно е да се истакне дека Теоријата на веројатност не е алтернатива, ниту предизвик на црно-белата слика за реалниот свет. Со зголемување на информациите, со пораст на извесноста на системот, веројатноста исчезнува, испарува, односно од реална потреба се трансформира во илузија. Така што, фази логичарите можеби со право го поставуваат прашањето: дали воопшто веројатноста постои во природата или не?

Со фази системите, (базирани на фази логика), за прв пат се овозможува математичка дескрипција на реалниот систем, на неизвесноста што егзистира во природата, без двовалентно упростување. Фази логиката всушност е резонирање со фази множества, каде што важи до некој степен, **А и не-А**. Формално име за фазинес е мултивалентност, што значи бесконечен спектар на опции наместо два екстрими или бивалентност. Логичарите уште во периодот 1920÷1930 истражувале на полето на мултивалентната логика за да го испитаат принципот на неизвесност на Heisenberg¹⁴ во квантната механика (односно на неизвесност меѓу поврзани варијабли, енергија и време, електрично и магнетно поле и др.). Тој укажал на тоа дека во истражувачкиот процес колку “поблиску” гледаш, може да видиш “помалку”. Во тоа време се појавил Полскиот логичар Jan Łukasiewicz¹⁵ со тривалентната логика, што претставува алгебра на фази множествата. Терминот *vagueness* за прв пат го користел логичарот Bertrand Russell¹⁶ за да ја опише мултивалентноста. Во 1937 година квантниот филозоф

¹⁴ Werner Heisenberg (5 December 1901 – 1 February 1976) was a German theoretical physicist who made foundational contributions to quantum mechanics and is best known for asserting the uncertainty principle of quantum theory. In addition, he also made important contributions to nuclear physics, quantum field theory, and particle physics. Heisenberg, along with Max Born and Pascual Jordan, set forth the matrix formulation of quantum mechanics in 1925. Heisenberg was awarded the 1932 Nobel Prize in Physics. Following World War II, he was appointed director of the Kaiser Wilhelm Institute for Physics, which was soon thereafter renamed the Max Planck Institute for Physics. He was director of the institute until it was moved to Munich in 1958, when it was expanded and renamed the Max Planck Institute for Physics and Astrophysics.

¹⁵ Jan Łukasiewicz (21 December 1878 – 13 February 1956) was a Polish logician and philosopher born in Lwów, Galicia, Austria-Hungary (now Lviv, Ukraine). His work centred on analytical philosophy and mathematical logic. He thought innovatively about traditional propositional logic, the principle of non-contradiction and the law of excluded middle.

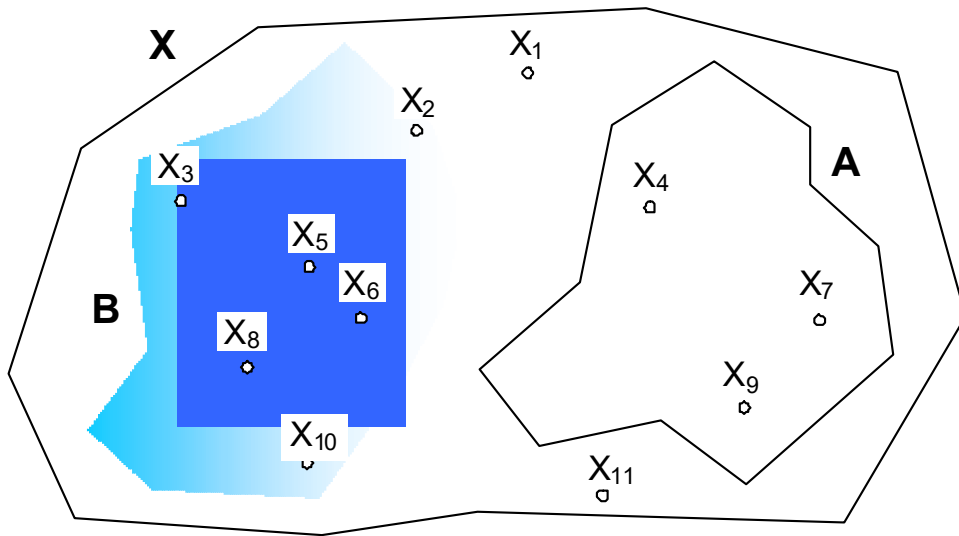
¹⁶ Bertrand Arthur William Russell, 3rd Earl Russell, OM, FRS (18 May 1872 – 2 February 1970) was a British philosopher, logician, mathematician, historian, socialist, pacifist and social critic. Although he spent most of his life in England, he was born in Wales, where he also died. He is considered one of the founders of analytic philosophy along with his protégé Wittgenstein and his elder Frege, and is widely held to be one of the 20th century's premier logicians. He co-authored, with A. N. Whitehead, *Principia Mathematica*, an attempt to ground mathematics on logic. Both works have had a considerable influence on logic, mathematics, set theory, linguistics, and philosophy. In 1950, Russell was awarded the Nobel Prize in Literature.

Max Black¹⁷ ја публикувал статијата "Vague Sets", неодредени, нејасни или магловити множества. Теоријата на фази множества е втемелена со славниот напис на Lotfi A. Zadeh¹⁸, (тогашен раководител на врвното инженерско школо во САД - University of California at Berkeley's Department of Electrical Engineering), "Fuzzy sets" во 1965 година во журналот "Information and Control".

Според класичната, конвенционална теорија на множества, множеството "X" е збир од елементи x_i (колекција од објекти) кои припаѓаат на множеството $\{x_i \in X, i=1, N\}$. Ако "A" е подмножество на "X", $A \subseteq X$, и ако е ординарно множество - crisp set - со остри граници, тогаш секој елемент од "A", $x_i \in A$ е придружен со карактеристична функција во множеството "A", $\mu_A(x) = \{0, 1\}$. Со карактеристичната функција се означуваат две вредности на вистинитост: 0.0 ако $x_i \notin A$ и 1.0 ако $x_i \in A$. Така за обичното, нефазно множество "A" од [слика 7.1](#), може да напишеме дека е составено од елементи со вредности на карактеристичната функција $\mu_A(x)=1$ или $A=\{x_4, x_7, x_9\}$.

¹⁷ Max Black (24 February 1909, Baku, Russian Empire [now Azerbaijan] – 27 August 1988, Ithaca, New York, United States) was a distinguished British-American - Azeri philosopher of Jewish descent, who was a leading influence in analytic philosophy in the first half of the twentieth century. He made contributions to the philosophy of language, the philosophy of mathematics and science, and the philosophy of art, also publishing studies of the work of philosophers such as Frege. He grew up in London, England, and he studied mathematics at Queens' College, Cambridge where he developed an interest in the philosophy of mathematics. Russell, Wittgenstein, G. E. Moore, and Ramsey were all at Cambridge at that time, and their influence on Black may have been considerable.

¹⁸ Lotfali Askar-Zadeh (Azerbaijani: Lütfi Əsgərzadə, Persian: [عسکرزاده لطفعلی](#), born February 4, 1921), better known as Lotfi A. Zadeh, is a mathematician, electrical engineer, computer scientist, and a professor of computer science at the University of California, Berkeley. He was born in Baku, Azerbaijan SSR, to a Russian Jewish mother (Fanya Koriman) who was a pediatrician, and an Iranian Azeri father from Ardabil who was a journalist on assignment from Iran. However, at the age of ten, when Joseph Stalin introduced collectivization of farms throughout the Soviet Union, the Zadeh family moved to Iran, his father's homeland. Zadeh grew up in Iran, and studied at Alborz High School. After high school, he sat for the national university exams and placed second in the entire country. In 1942, he graduated from the University of Tehran with a degree in electrical engineering (Fanni), and moved to the United States in 1944. He received an MS degree in electrical engineering from MIT in 1946, and a PhD in electrical engineering from Columbia University in 1949. Zadeh taught for ten years at Columbia University, was promoted to Full Professor in 1957, and has taught at the University of California, Berkeley since 1959. He published his seminal work on fuzzy sets in 1965 in which he detailed the mathematics of fuzzy set theory. In 1973 he proposed his theory of fuzzy logic.



Сл. 7.1. Конвенционално множество “А” и фази множество “В”

Ако “В” е подмножество на “X”, $B \subseteq X$, и ако е расплинато множество - fuzzy set - без остри граници, тогаш секој елемент од “В”, $x_i \in B$ е придружен со функција на припадност - membership function - во множеството “В”, $\mu_B(x) = [0,1]$. Со функцијата на припадност се означуваат вредности на вистинитост во интервалот $0 \div 1$, односно степенот на припадност $\mu_B(x)$ е вредност на вистинитост дека $i^{\text{тиот}}$ елемент x_i припаѓа на множеството “В”. Фази множеството симболично се означува со $B = \{(x | \mu_B(x)), \forall x \in X\}$ или ако “X” е континуум $B = \int_{x \in X} [x | \mu_B(x)]$, каде со симболот за интеграл се означува унија, односно ако континуумот се апроксимира со конечен број “N” елементи $B = \sum_{x=1, N} [x | \mu_B(x)]$. Подмножеството на фази множеството “В” од [слика 7.1](#) составено од елементи со вредности на функцијата на припадност $\mu_B(x) > 0$ се нарекува поддршка на “В” или $\text{sup}B = \{x_2 | 0.1 + x_3 | 0.3 + x_5 | 1.0 + x_6 | 0.8 + x_8 | 1.0 + x_{10} | 0.3\}$, каде со симболот “+” се означува логички оператор “И”, односно "AND".

Суштинската разлика меѓу Класичната теорија на множества и Теоријата на фази множества се состои во следното: во класичната теорија се работи со објекти чија припадност кон множеството е јасно дефинирана, додека во теоријата на фази множества, припадноста (членството) на елементот во множеството може да биде делумна, односно објектот припаѓа во множеството со степен на извесност (веројатност) на членување. Со конвенционалното множество се допираат екстремните вредности, граничните големини на фази множеството. Ако вредностите на функциите на припадност се апроксимираат во 0 и 1, тогаш фази множеството се редуцира во обично множество.

* * *

Со формулирањето на Теоријата на фази множества, Задех се спротивставил на огромниот број научници, од кои доаѓа најжестоката критика на фази теоријата. Овие конвенционални научници при истражувањето на реалните проблеми размислуваат со двовалентна логика или со црно-белото

функционирање на компјутерите. Според познатиот професор William Kahan¹⁹ од UC Berkeley, кој бил вработен во истиот оддел со Задех, (Kosko, 1994), „Фази теоријата е погрешна, неточна и штетна. Тоа што е потребно е повеќе логичко размислување, а не помалку. Опасноста од фази логиката е што ќе го охрабри видот на непрецизно размислување и тоа ќе донесе многу проблеми. Фази логиката е кокаин на науката.” Денешните компјутерски научници имаат изградено поле на вештачка интелигенција (ВИ) - Artificial Intelligence - верувајќи дека знаењето се правила кои може да се кодираат со црно-белиот компјутерски јазик и симболична логика. После повеќе од 30 години истражувања со фондови од милијарди долари сè уште не се произведени паметни машини. Според инженерите на вештачката интелигенција сегашните експертни системи користат од 100 до 1,000 бивалентни правила, а права интелигенција може да се очекува кај системи со 100,000 правила. Фази истражувачите за кратко време изградиле стотина паметни машини. Суштината на неуспехот на ВИ е дека нема потреба од многу правила за повеќето задачи, туку дека се неопходни фази правила, правила на здрав разум, базирани на фази множества, со кои се апроксимираат нејасни и непрецизни термини од реалниот проблем (Groothuizen, 1986; Leung, 1988).

Втората критика на фази теоријата доаѓа од школото на Теоријата на веројатност. Задех употребил броеви од 0.0 до 1.0 за да ја опише нејасноста и неодреденоста или суштината на подредувањето (Zadeh, 1990). Според научниците приврзани на Теорија на веројатност, каде вредноста на веројатноста исто така е во интервалот од 0 до 1, фази теоријата е маскирана теорија на веројатност и фази множествата може да се третираат како множества на случајни броеви. Според професор Myron Tribus од IEEE Institute (Kosko, 1994) „Фазинес е веројатност во маскирање. Можам да дизајнирам контролер со Теорија на веројатност што ќе ги извршува истите работи како и контролерот базиран на фази логика”. Според научниците кои предност му даваат на фази логиката, Теоријата на веројатност не го реши основниот проблем

¹⁹ William Morton Kahan (born June 5, 1933, in Toronto, Ontario, Canada) is a mathematician and computer scientist whose main area of contribution has been numerical analysis. Among his colleagues he is known as Velvel Kahan. He attended the University of Toronto, where he received his Bachelor's degree in 1954, his Master's degree in 1956, and his Ph.D. in 1958, all in the field of mathematics. Among his many contributions, Kahan was the primary architect behind the IEEE 754-1985 standard for floating-point computation (and its radix-independent follow-on, IEEE 854) and developed the Kahan summation algorithm, an important algorithm for minimizing error introduced when adding a sequence of finite precision floating point numbers. In the 1980s he developed the program "paranoia", a benchmark that tests for a wide range of potential floating point bugs. He received the Turing Award in 1989, and was named an ACM Fellow in 1994. Kahan is now a professor of mathematics, computer science, and electrical engineering at the University of California, Berkeley, and continued his contributions to the IEEE 754 revision that led to the current IEEE 754 standard. He has been called "The Father of Floating Point," since he was instrumental in creating the original IEEE 754 specification.

на разминувањето (помеѓу математиката и реалноста), и таа е само нова наука на врвот на црно-белата теорија на бивалентност што го исполни светот со фантомот на случајност. Според нив веројатноста е концепт за кој математичарите безуспешно со години не напреднале во идејата што е тоа, како изгледа, како се мери и како да се тестира или потврди некој исказ од веројатноста?

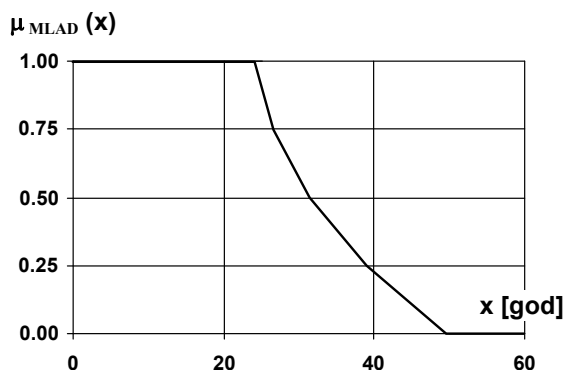
Третото спротивставување на фазинес беше *непостоењето на апликации* базирани на Теоријата на фази множества. На новите идеи и теории, едноставно, неопходно им е време за практична примена. Всушност, Задех - втемелителот на фази множества, никогаш не направил апликација на неговата математичка теорија. Трите историски примери кои имаа огромна улога во пробивањето на фази апликациите се: (1) Печка за цемент во Данска од 1982 година, каде беше употребена фази техника за имплементација на експертен систем, во кој беше инкорпорирано оперативното искуство во продукцијата на цемент. (2) Оперативен контролер на подземна железница во Шендаи - Јапан, од 1986 година. Ова е најславната апликација базирана на фази логика, проектирана од тим на Hitachi. При развој и тестирање на контролерот се користела стратегија од искусни оператори, која била имплементирана во фази правила за контрола на брзина, кочење, комфор и безбедност на патниците. Од досегашното искуство се забележува редуцирање на потрошувачката на енергија за 10% и дуплирање на индексот на комфор. (3) Првата финансиска фази апликација е Jamaichi fund за трговија, во комерцијална употреба од 1988 година. Овај фази експертен систем тргува со 65 индустрии и содржи 800 фази правила, кои се определуваат месечно од група на експерти. Системот бил тестиран 2 години и покажувал пораст на ефективност за 20%, спореден со конвенционалното управување. Интересно е да се истакне дека за време на тестирањето, 18 дена пред “Црниот Понеделник” на берзата од 1987 година, системот препорачувал само “продавај”. Почетното неприфаќање на теоријата на фази множества, во научните кругови, влијаела врз нејзиниот нестандарден развој. Фазинес имал невообичаен развој, од “улица” се пробивал кон “универзитет”. Според многумина токму “пазарот” допринел фазинес за кратко време да стани силен и популарен. Во продолжение е даден преглед со комерцијални и индустриски апликации на фази системи ([Munakata, 1994](#)), што укажува дека најдобра одбрана на фази логиката е дека таа едноставно работи!

Година:	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Апликации:	8	15	50	100	150	300	800	1,500

7.2. Фази логика, основни принципи и елементи

Основниот принцип на фази теоријата е дека важноста на сè е во подредувањето или дека се состои во споредување. Фазинес се забележува кога границите на парче од информација не се остро и јасно отсечени ([FuzzyClips, 1994](#)). Тоа се забележува кај нејасните, фази концепти како на пример: млад ([слика 7.2](#)), добар, голем; каде што не постои единична квантитативна вредност, која може да ги дефинира овие изрази.

Клучна идеја на фази резонирањето е принципот на инкомпатибилност, дефиниран од Задах како “Пораст на прецизност, намалување на значајност, зголемување на фазинес”. Задах увидел дека како што системот се здобива со посложени и попречизни тврдења, се повеќе губи значајност. Или, како се зголемува сложеноста на системот, така нашата способност да направиме прецизни и сигнификантни тврдења за однесувањето на системот - исчезнува. Според Bart Kosko (Kosko, 1994) „Колку некој поблиску погледнува во проблем од реалниот свет, толку повеќе фази станува решението на проблемот”. Овој принцип ја содржи суштинската разлика меѓу Теоријата на веројатноста и Теоријата на фазинес. Информациите ни овозможуваат да го согледаме реалниот свет. Со зголемување на прецизноста на истражувањето, се зголемува количината на добиени информации и добиваме појасна слика за реалноста. Со внесување на информациите се добива пореална слика и повеќе факти за реалниот проблем, со што: (а) се зголемува извесноста и се намалува веројатноста и (б) се зголемува фазинес на фактите, (фази множествата на фази исказите добиваат повеќе испакнувања и нерамнини).



Сл. 7.2. Фази множество за концептот млад

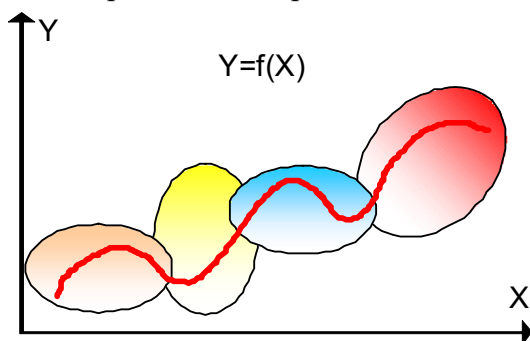
За разлика од конвенционалната двовалентна логика, (или 0 или 1), во фази логиката се користи поливалентна логика, односно вредноста на вистинитоста е во интервалот од 0 до 1. Генерално фази системите (базирани на фази логика) се соодветни за неизвесно или апроксимативно резонирање. Во фази системите описот на правилата за контрола е обично попрост и полесен, често се потребни неколку правила, и затоа овие системи егзекутираат побрзо од конвенционалните системи. Накратко, конвенционалните методи се добри за едноставни управувачки проблеми, додека фази системите се соодветни за комплексни проблеми, кои го инволвираат човековото дескриптивно или интуитивно размислување.

Кај системите базирани на фази логика се истакнуваат два клучни елементи (Kosko, 1994):

- ✓ ФАТ теорема (Fuzzy Approximation Theorem, фази апроксимативна теорема) со која се објаснува зошто фази системите работат и
- ✓ ФАМ меморија (Fuzzy Associative Memory, фази асоцијативна меморија) која дефинира како фази системите работат.

Со ФАТ теоремата системот секогаш го пресликува влезот во излез, (или прашањата во одговори), така што со фази системот може да се моделира или

апроксимира било кој процес, на било кој систем. Нека е даден некој реален систем каде се реализира некој процес со кој се трансформира влезот “X” во излез “Y” според нелинеарната зависност $Y=f(X)$, [слика 7.3](#). Идејата на ФАТ теоремата е едноставна геометрија, да се покрие кривата $Y=f(X)$ со закрпки или фигури, [слика 7.3](#). Секое парче од човековото знаење за тој систем, секое правило во форма "IF this THEN that", (“АКО ова ТОГАШ тоа”), дефинира закрпка. Повеќе знаење подразбира повеќе правила, односно повеќе фигури, и подобро покривање на кривата. Колку подобро овие фигурички ја покриваат кривата $Y=f(X)$, толку “попаметен” е фази системот. Колку се понеизвесни правилата, толку се поголеми закрпките и обратно. Ако правилата се толку прецизни, така што се потполно јасни и извесни, односно не се фази, тогаш фигурите се трансформираат во точки по должината на кривата и фази системот се претворува во конвенционален систем. ФАТ теоремата покажува зошто фази системите работат. Знаењето, или здравиот разум, дава правила, кои прво ги изразуваме со зборови, а потоа ги врзуваме за фази множества: $A_1, A_2, A_3, \dots$ и $B_1, B_2, B_3, \dots$. Со тоа се дефинираат фази правила како: АКО X е A_1 ТОГАШ Y е B_1 , АКО X е A_2 ТОГАШ Y е $B_2, \dots$, односно конечен бој на фигури кои се преклопуваат и со кои се покрива нелинеарната зависност $Y=f(X)$.



Сл. 7.3. Систем за пресликување на “X” во “Y”

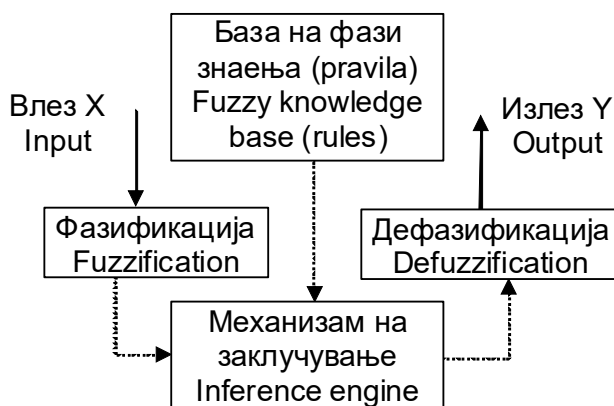
Фази системот работи, (конвертира влезен број “X” во излезен “Y”), со поддржување на ФАМ (фази асоцијативна меморија). ФАМ покажува како работи фази системот, што се објаснува со поставката дека во фази системот сите правила “се палат” или се активираат до некој степен. Се палат паралелно и делумно, најмногу од нив до нулти степен. Тоа е начинот на работа на асоцијативната, здружена меморија која ја активира целата меморија, при што се палат сите правила до некој степен. ФАМ е модел на човековото резонирање. Човековиот избор зависи од комплексно и нелинеарно процесирање во мозокот, со активирање на многу правила до одреден степен, а потоа, секако без решавање на математички равенки туку со интуиција, со чувство, го добива одговорот, при што не може да го објасни направениот избор.

7.3. Основни поими на фази системите

Со фази системите може да се апроксимираат континуални системи на компактни или затворени (ограничени) множества, каде се вклучени скоро сите системи во науката. Во пракса никој не знае да ги запиши равенките за дескрипција на повеќето реални системи, бидејќи се премногу нелинеарни.

Суштината на фази системите е дека нема потреба од математичко моделирање на процесот. Фази системите ни дозволуваат да добиваме сознанија за непознатите нелинеарни системи со своите реални “нијанси на сиво”, без претходно да се изработат идеализирани и упростени “црно-бели” математички модели. Ова е клучната точка каде фази системите се раздвојуваат од конвенционалните системи. Техничкиот израз за тоа е *моделот е ослободен од естимација или апроксимација*.

(А) Изготвувањето на фази систем е за иста цел како и изработката на било кој друг систем, за пресликување на влез во излез. Фази системот (слика 7.4) во основа содржи три нивоа: фазификација, механизам на заклучување и дефазификација.

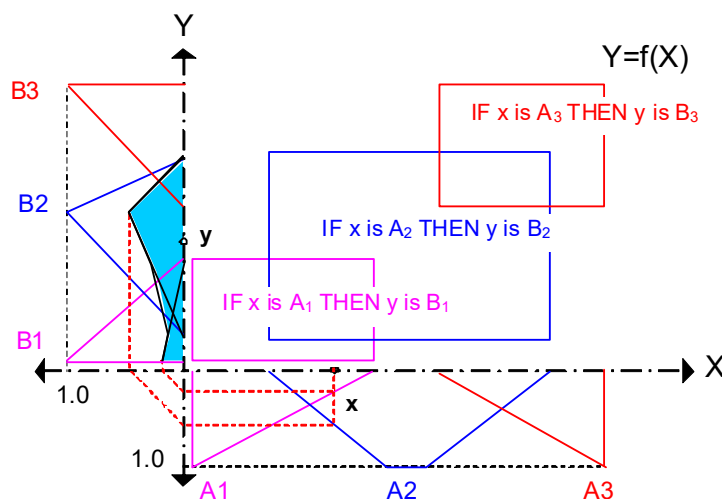


Сл. 7.4. Блок дијаграм на фази систем

1. Фазификација.

Фазификација е процес што ги комбинира актуелните вредности (измерените) со меморираните податоци за функцијата на припадност и произведува фази влезни податоци (вредности на вистинитост на фази варијабли). Од слика 7.4а се добива:

$$mA_1(x=0.4)=0.3; mA_2(x=0.4)=0.6; mA_3(x=0.4)=0.0 \quad (7.0.1)$$



Сл. 7.4а. Трансформирање на влезна големина x во излезна y во фази систем

2. Механизам на заклучување

Механизам на заклучување или генерирање на фази заклучоци претставува начин на добивање на нумерички одговор од лингвистички формирани правила, (од влезните вредности во системот). Тој се состои во два чекори: (I) степен за задоволување или “тежини” на фази правила и (II) генерирање на излезно фази множество. При тоа, математичкиот израз MIN одговара на логичкиот оператор AND (И) кој одговара на операцијата на фази множества $\cap$ (пресек) и MAX е соодветен на OR (ИЛИ) односно на $\cup$ (унија). Од [слика 7.4а](#) се добива:

$$a_1 = \text{MAX} \{ \text{MIN} [m_{A1}(x=0.4)=0.3] \} \quad (7.0.2)$$

$$a_2 = \text{MAX} \{ \text{MIN} [m_{A2}(x=0.4)=0.6] \} \quad (7.0.3)$$

$$a_3 = \text{MAX} \{ \text{MIN} [m_{A3}(x=0.4)=0.0] \} \quad (7.0.4)$$

Излезот од процесот на фази заклучување е фази множество каде е дистрибуиран фази заклучок. Развиени се две техники за изведување на заклучок fuzzy inference techniques: (а) максимизација на минимум (max-min rule of inference) и (б) максимизација на производ (max-pro rule of inference). Разликуваме едноставен механизам на заклучување, ако при фазификацијата на влезната големина се “пали” само едно фази правило и сложено генерирање на фази заклучоци, ако се “палат” две или повеќе фази правила ([слика 7.4а](#)). Во тој случај се добиваат две или повеќе смалени (според вредноста на вистинитост од фазификацијата) излезни множества што се преклопуваат. Излезното множество кај старите фази системи е обвивката на силуетата од добиените множества (анvelopна дефазификација), а кај новите системи се собираат добиените множества, (адитивна дефазификација, [слика 7.4а](#)). Адитивното фази излезно множество, според max-min би било:

$$B(y) = \text{MIN}(a_1, B_1(y)) + \text{MIN}(a_2, B_2(y)) + \text{MIN}(a_3, B_3(y)) \quad (7.0.5)$$

Адитивното фази излезно множество, според max-pro, е следната сума:

$$B(y) = a_1 B_1(y) + a_2 B_2(y) + a_3 B_3(y) \quad (7.0.6)$$

3. Дефазификација.

Фази системот ги комбинира сите излези (анvelopен или адитивен начин) и изведува фази излезно множество. Во некои случаи мора да се аплицира единична дискретна акција, односно да се селектира единична точка (конвенционален број “Y”, репрезентативен број на излезното фази множество, [слика 7.4а](#)), која ја рефлектира најдобрата вредност на фази множеството. Овој процес на редукција на фази множество во класична нумеричка вредност се нарекува дефазификација.

Постојат неколку методи за дефазификација ([FuzzyClips, 1994](#)): COG (center of gravity) - тежиште или центроид и MOM (mean of maxima) - средина на максимуми. Со методот на центроид на маса ([релација 7.1](#)) се продуцираат глатки варијации на контролната акција, но недостаток е недоволна отежнетост на најпотенцираното фази правило.

$$Y = \int y B(y) dy / \int B(y) dy = \sum y_i B_i / \sum B_i \quad (7.1)$$

каде y_i се координати на локални тежишта на сегментите B_i . Од [слика 7.4](#) се добива центроидот на излезното фази множество $Y = 0.35$. Со методот MOM (релација 7.2) побрзо се извршуваат пресметките, но излезот од контролерот е помалку гладок.

$$Y = \sum y_j / J \quad (7.2)$$

каде y_j се координати на еднакви максимуми, а “J” е вкупниот број на еднакви максимуми.

(Б) Основни чекори за развој на фази систем се:

1. Утврдување дали фази системот е правилен избор за проблемот. Ако знаењето за однесувањето на системот е опишано во апроксимативна форма (АКО X е A_1 , ТОГАШ Y е B_1 ; ...) или со хеуристички правила, тогаш фази системот е соодветен.
2. Идентификација на влез и излез во системот (лингвистички фази варијабли “X” и “Y”) и нивниот ранг.
3. Дефинирање на карактеристични функции (membership functions - функции на припадност), за сите фази множества (примарни термини) $A_i \subseteq X$ и $B_i \subseteq Y$ со кои се апроксимираат сите влезни и излезни параметри. Колку карактеристични функции се потребни е избор на планерот, и зависи од однесувањето на системот.
4. Конструирање на база на правила. Зависи од проектантот на фази системот колку правила се потребни, и кога да престане со додавање на нови правила. За еднодимензионален систем $Y=f(x)$, ([слика 7.4a](#)), каде излезниот параметар зависи само од една влезна големина, базата на правила може да се претстави со еднодимензионална логичка таблица:

	A_1	B_1	
X	A_2	B_2	Y
	A_3	B_3	

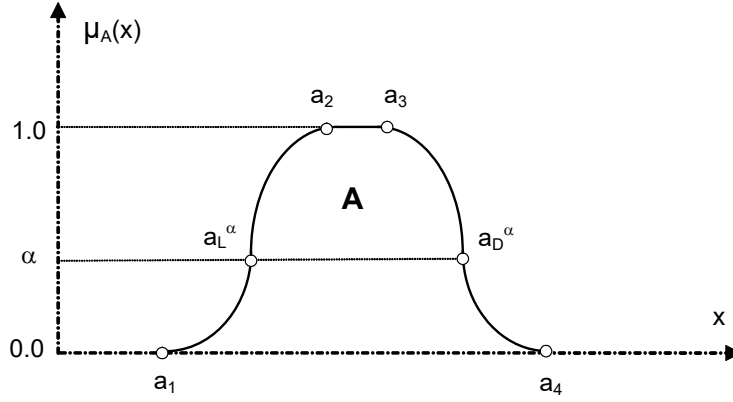
5. *Верификација*. Проверка дека излезот од базата на правила е коректна.

* * *

Треба да се истакне дека фино подесување или тарирање (калибрирање) на фази системот се постигнува со: (а) промена на параметрите на фази множествата (за влезна “X” или излезна “Y” големина) и (б) додавање или одземање на фази правила; со што се менува одговорот на фази системот.

7.4. Аритметички операции со фази броеви

Алгебрата на фази множествата е дефинирана егзактно, по аналогија со алгебрата на бинарните множества ([Djordjević, 1994](#); [Dubois, 1980](#); [Munakata, 1994](#); [Zadeh, 1988](#)). Неодредената големина, дефинирана во облик на фази број “A”, графички е презентираан на [слика 7.5](#).



Сл. 7.5. Фази број (фази множество, фази концепт) A со α пресек

На ординатната оска е нанесена $\mu(x)$ или $\mu_A(x)$, функција на дистрибуција на припадност (membership function) на “ x ” во “ A ”, која се дефинира со следниот израз:

$$\mu_A(x) \in [0,1], \forall x \in A \quad (7.3)$$

Фази бројот има соодветен интервал на доверба, кој симболички се означува како $A=[a_1, a_4]$. Големината на интервалот на доверба зависи од степенот на неодреденоста на фази бројот.

Покрај овај интервал (за $\mu = 0.0$), може да се направат и “ α ” пресеци за различни вредности на μ : $0.0 < \mu \leq 1.0$. Овие пресеци кои се нарекуваат “ α ” пресеци на фази број “ A ”, претставуваат обично множество и се дефинираат како:

$$A_\alpha = \{ x: \mu_A(x) \geq \alpha, \forall x \in X \} \quad (7.4)$$

а се означуваат со следниот израз:

$$\forall \alpha \in [0,1]: A_\alpha = [a_L^\alpha, a_D^\alpha] \quad (7.4a)$$

Интервалот на доверба и “ α ” пресеците се важни, зашто сите главни операции со фази броевите се извршуваат со нив. Ако се дадени фази броевите “ A ” со $\mu_A(x)$ и “ B ” со $\mu_B(y)$, и реалниот конвенционален број “ d ”, тогаш основните операции со нив, со што се добива фази број “ C ” со $\mu_C(z)$, би биле следните, (релации 7.5 ÷ 7.13):

$$\begin{aligned} 1) \text{ собирање (+)} \quad C &= A+B & \mu_C(z) &= \cup_{z=x+y} [\mu_A(x) \cap \mu_B(y)] \\ C_\alpha &= (A+B)_\alpha = [\text{MIN}(a_L^\alpha + b_L^\alpha, a_L^\alpha + b_D^\alpha, a_D^\alpha + b_L^\alpha, a_D^\alpha + b_D^\alpha); \text{MAX}(a_L^\alpha + b_L^\alpha, a_L^\alpha + b_D^\alpha, a_D^\alpha + b_L^\alpha, a_D^\alpha + b_D^\alpha)] = [a_L^\alpha + b_L^\alpha, a_D^\alpha + b_D^\alpha] \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ одземање (-)} \quad C &= A-B & \mu_C(z) &= \cup_{z=x-y} [\mu_A(x) \cap \mu_B(y)] \\ C_\alpha &= (A-B)_\alpha = [\text{MIN}(a_L^\alpha - b_L^\alpha, a_L^\alpha - b_D^\alpha, a_D^\alpha - b_L^\alpha, a_D^\alpha - b_D^\alpha); \text{MAX}(a_L^\alpha - b_L^\alpha, a_L^\alpha - b_D^\alpha, a_D^\alpha - b_L^\alpha, a_D^\alpha - b_D^\alpha)] = [a_L^\alpha - b_D^\alpha, a_D^\alpha - b_L^\alpha] \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ множење (*)} \quad C &= A*B & \mu_C(z) &= \cup_{z=x*y} [\mu_A(x) \cap \mu_B(y)] \\ C_\alpha &= (A*B)_\alpha = [\text{MIN}(a_L^\alpha * b_L^\alpha, a_L^\alpha * b_D^\alpha, a_D^\alpha * b_L^\alpha, a_D^\alpha * b_D^\alpha); \text{MAX}(a_L^\alpha * b_L^\alpha, a_L^\alpha * b_D^\alpha, a_D^\alpha * b_L^\alpha, a_D^\alpha * b_D^\alpha)] = [a_L^\alpha * b_L^\alpha, a_D^\alpha * b_D^\alpha] \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned}
4) \text{ делење } (/) \quad C &= A/B \quad \mu_C(z) = \cup_{z=x/y} [\mu_A(x) \cap \mu_B(y)] \\
C_\alpha &= (A/B)_\alpha = [\text{MIN}(a_L^\alpha / b_L^\alpha, a_L^\alpha / b_R^\alpha, a_R^\alpha / b_L^\alpha, a_R^\alpha / b_R^\alpha); \text{MAX}(a_L^\alpha / b_L^\alpha, a_L^\alpha / b_R^\alpha, a_R^\alpha / b_L^\alpha, a_R^\alpha / b_R^\alpha)] = [a_L^\alpha / b_R^\alpha, a_R^\alpha / b_L^\alpha] \quad (7.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5) \text{ инверзија } (^{-1}) \quad C &= A^{-1} \quad \mu_C(z) = \cup_{z=1/x} [\mu_A(x)] \\
C_\alpha &= (A^{-1})_\alpha = [\text{MIN}(1/a_L^\alpha, 1/a_R^\alpha); \text{MAX}(1/a_L^\alpha, 1/a_R^\alpha)] = [1/a_R^\alpha, 1/a_L^\alpha] \quad (7.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6) \text{ максимум (max)} \quad C &= \text{MAX}(A, B) \quad \mu_C(z) = \cup_{z=x \cup y} [\mu_A(x) \cap \mu_B(y)] \\
C_\alpha &= \text{MAX}(A, B)_\alpha = [\text{MAX}(a_L^\alpha, b_L^\alpha); \text{MAX}(a_R^\alpha, b_R^\alpha)] \quad (7.10)
\end{aligned}$$

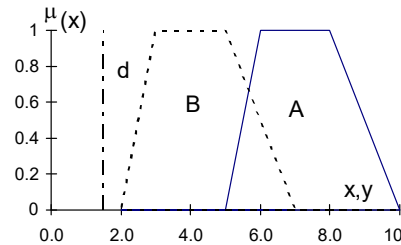
$$\begin{aligned}
7) \text{ минимум (min)} \quad C &= \text{MIN}(A, B) \quad \mu_C(z) = \cup_{z=x \cap y} [\mu_A(x) \cap \mu_B(y)] \\
C_\alpha &= \text{MIN}(A, B)_\alpha = [\text{MIN}(a_L^\alpha, b_L^\alpha); \text{MIN}(a_R^\alpha, b_R^\alpha)] \quad (7.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8) \text{ собирање со d (+d)} \quad C &= d + A \quad \mu_C(z) = \cup_{z=d+x} [\mu_A(x)] \\
C_\alpha &= (d+A)_\alpha = [\text{MIN}(d+a_L^\alpha, d+a_R^\alpha); \text{MAX}(d+a_L^\alpha, d+a_R^\alpha)] = [d+a_L^\alpha, d+a_R^\alpha] \quad (7.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9) \text{ множење со d (*d)} \quad C &= d * A \quad \mu_C(z) = \cup_{z=d*x} [\mu_A(x)] \\
C_\alpha &= (d*A)_\alpha = [\text{MIN}(d*a_L^\alpha, d*a_R^\alpha); \text{MAX}(d*a_L^\alpha, d*a_R^\alpha)] = [d*a_L^\alpha, d*a_R^\alpha] \quad (7.13)
\end{aligned}$$

Утврдено е дека трапезните фази броеви (слика 7.6) се адекватни за опфаќање на фази неизвесноста во човековата интуиција. Трапезниот фази број може да се дефинира преку α пресеци со следниот израз:

$$\forall \alpha \in [0,1]: A_\alpha = [a_L^\alpha, a_R^\alpha]; \quad a_L^\alpha = a_1 + (a_2 - a_1)\alpha, \quad a_R^\alpha = a_4 - (a_4 - a_3)\alpha; \quad (7.14)$$



Сл. 7.6. Трапезни фази броеви A и B

За избрани трапезни фази броеви “A” и “B”, прикажани на слика 7.6, кои се имплементираат како листа од 4 конвенционални броеви $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, и реален скалар “d”, (при што за операциите множење, делење и инверзија се добиваат приближни трапезни броеви, апроксимирани со вредностите на $\alpha = 0.0$ и $\alpha = 1.0$), основните алгебарски операции би биле следните, (релации 7.15):

$$A+B = \{a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, a_4+b_4\}$$

$$A-B = \{a_1-b_4, a_2-b_3, a_3-b_2, a_4-b_1\}$$

$$A*B = \{a_1*b_1, a_2*b_2, a_3*b_3, a_4*b_4\}$$

$$A/B = \{a_1/b_4, a_2/b_3, a_3/b_2, a_4/b_1\}$$

$$A^{-1} = \{1/a_4, 1/a_3, 1/a_2, 1/a_1\}$$

$$\max(A,B) = \{\max(a_1,b_1), \max(a_2,b_2), \max(a_3,b_3), \max(a_4,b_4)\}$$

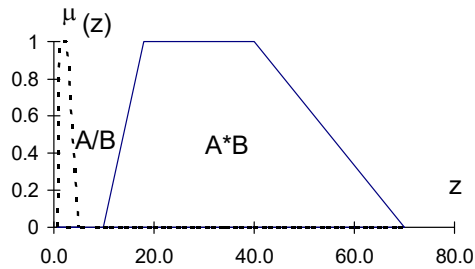
$$\min(A,B) = \{\min(a_1,b_1), \min(a_2,b_2), \min(a_3,b_3), \min(a_4,b_4)\}$$

$$d+A = \{d+a_1, d+a_2, d+a_3, d+a_4\}$$

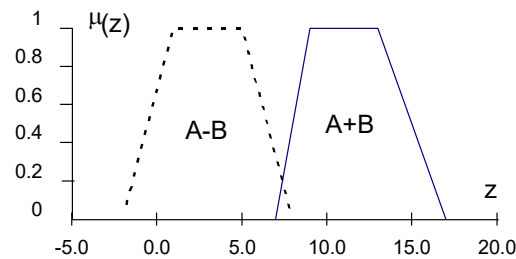
$$d*A = \{d*a_1, d*a_2, d*a_3, d*a_4\} \quad (7.15)$$

* * *

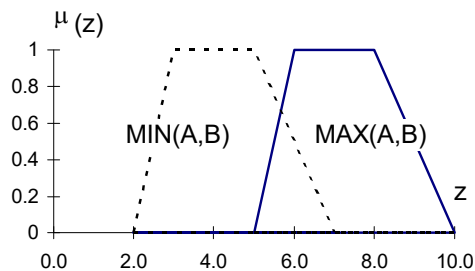
Во продолжение е дадена графичка презентација (слики 7.8 ÷ 7.10) на основните операции со фази броеви, со користење на релациите 7.15:



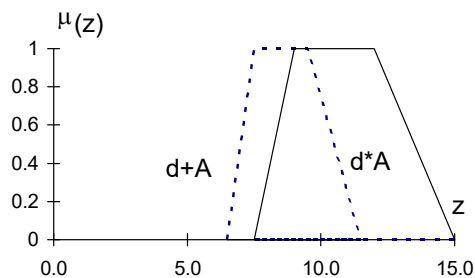
Сл. 7.8. Множење и делење на фази броеви



Сл. 7.7. Собирање и одземање на фази броеви



Сл. 7.9. Максимизација и минимизација на фази броеви



Сл. 7.10. Собирање и множење на скалар со фази број

7.5. Фази контролер за реално управување со ВСС

Во натамошниот текст, утврдувањето на најсоодветен фази контролер за идентификуваниот управувачки проблем (реално управување со водостопански систем со акумулација), е преку споредба на два фази контролери, развиени врз база на две гносеолошки структури.

Во едноставната структура е усвоено дека крајната релативна исполнетост (излезната големина) Rvk е во функција од:

- (а) почетната релативна исполнетост Rvp и
- (б) релативното дотекување Rx .

Во сложената структура е усвоено дека двете излезни големини:

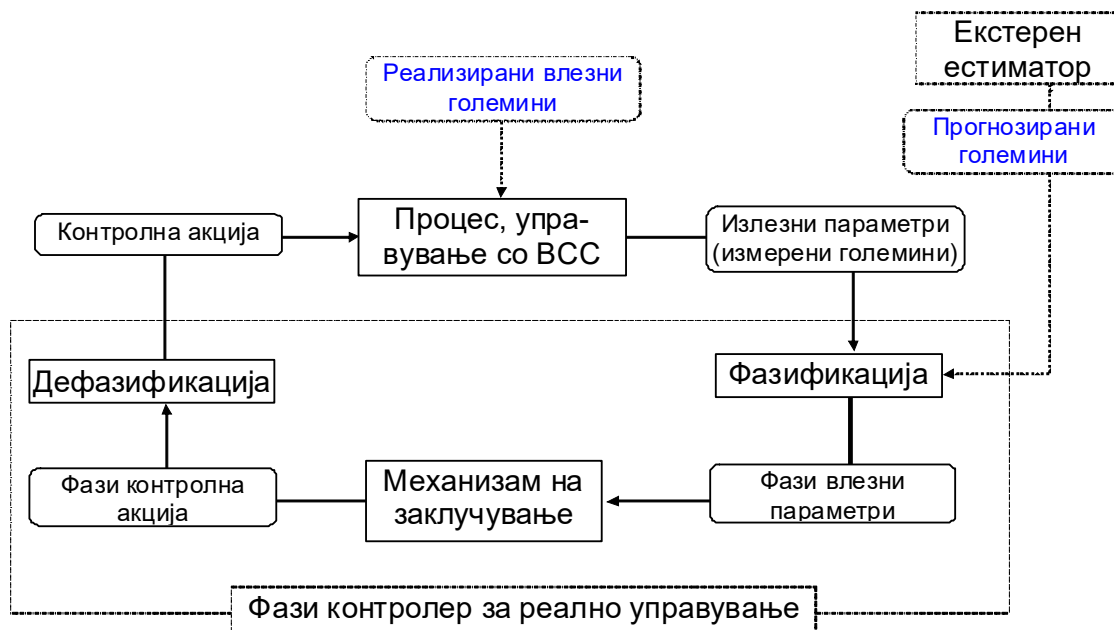
- (1) степен на енергетското користење на водниот ресурс Re и
- (2) степен на користење на водниот ресурс за наводнување Rn ,

се во функција од:

- (а) почетна релативната исполнетост Rvp ,
- (б) релативното дотекување Rx ,
- (в) градиент на релативно дотекување gRx , и
- (г) крајна релативна исполнетост Rvk , (која влијае како повратна спрега зависно од избраните степени).

Кај зависностите во моделите за реално управување постои силно изразена неизвесност и неодреденост (нелинеарност), па затоа за решавање на управувачкиот проблем, (контрола на водостопански систем), изработени се модели кои базираат на фази логика. Овие варијабли (независни и зависни) се нарекуваат лингвистички или фази варијабли, бидејќи содржат природна непрецизност или неодреденост и не може нумерички да се квантифицираат.

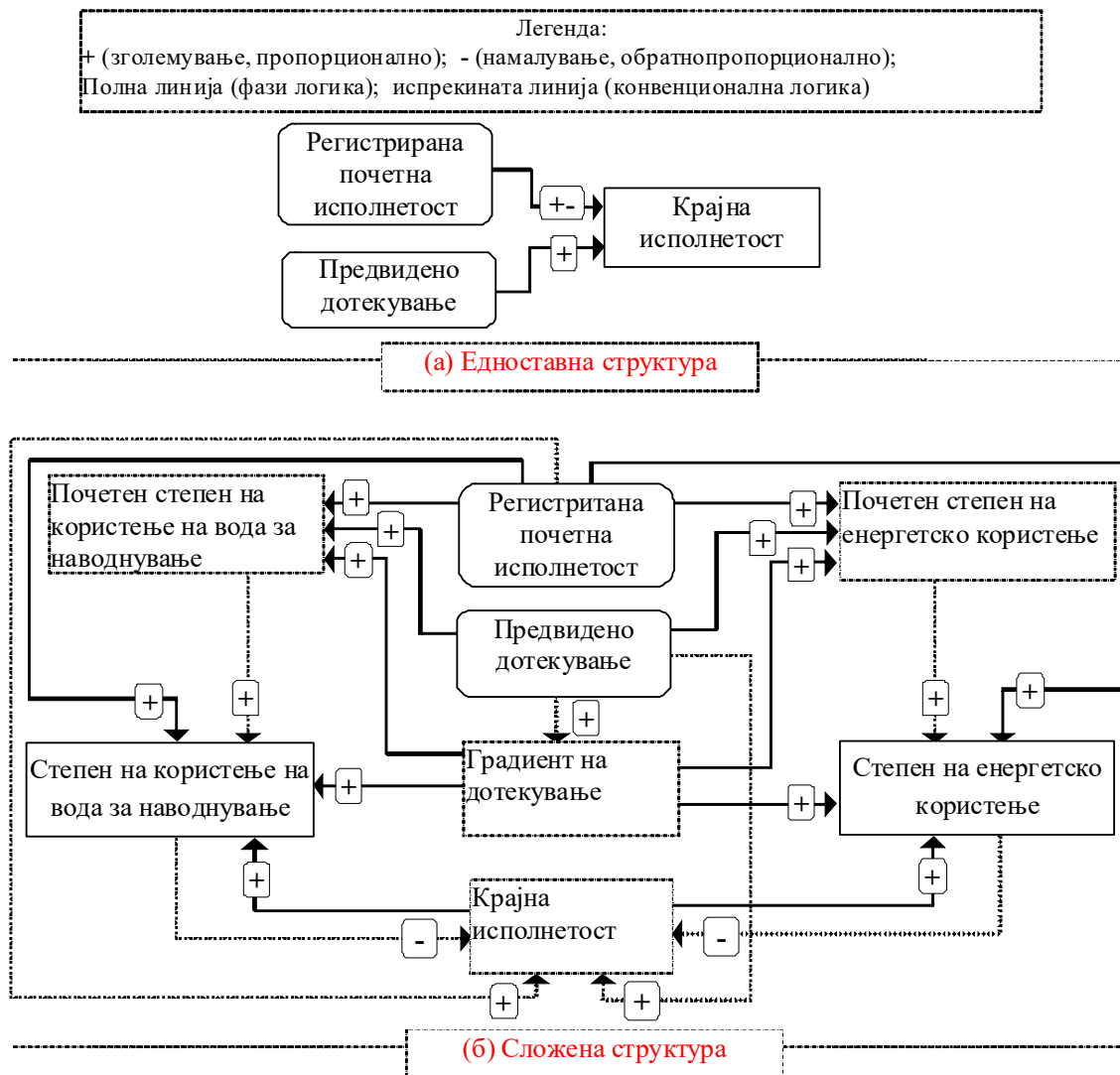
Првиот чекор при изработка на фази контролерот е јасна идентификација на интеракцијата на контролерот со процесот со кој се управува (слика 7.11). Во истражуваниот модел, фазификација се применува над влезните големини (лингвистички варијабли): Rvp , Rx , gRx и Rvk . Процесот на дефазификација се користи за излезните големини (фази варијабли): Rvk , Re и Rn , за да се трансформираат во конвенционални скалари, кои претставуваат реална контролна акција во процесот на управување со ВСС. Во клучката за фази контрола на ВСС со акумулација, влијание уште има и векторот на реализирани влезни големини (директно во трансформацијата на состојбите на системот), како и надворешниот естиматор за прогноза на влезни големини (во процесот на фазификација).



Сл. 7.11. Клучка за фази контрола на водостопански систем со акумулација

Вториот чекор при моделирањето на контролерот е дефинирањето на гносеолошката шема - базирана на правила на здрав разум (слика 7.12). Во спознајната шема е потребно да бидат дефинирани влијанијата меѓу релевантните лингвистички варијабли, односно променливи кои имаат суштинско значење во реализација на процесот со кој се управува. Овие влијанија може да бидат позитивни (зголемување на вредноста на варијаблата) или негативни (намалување на вредноста на променливата врз која дејствува влијанието). Во спознајната шема треба да се раздвојат конвенционалните (кои може математички да се формализираат со класична логика) од фази влијанијата (кои се непрецизни и премногу нелинеарни, па затоа за нивна дескрипција се користи фази логика). Тука, до полн израз доаѓа констатацијата дека, ако логиката на здравиот разум му помага на луѓето да управуваат со непрецизните информации, тогаш фази логиката му помага на компјутерите.

При конструкција на фази контролерот е користена стандардна процедура, прилагодена за анализираниот процес на управување, која се состои од: (1) дефинирање на фази систем (математички модел на фази контролер и интуитивни смерници или правила), (2) идентификација на влез и излез во системот и нивниот ранг, (3) усвојување на број на примарни термини за апроксимација на фази варијабли, (4) избор на функции на припадност, (5) одредување на база на фази правила, и на крај (6) калибрирање и верификација. Треба да се истакне дека за секој управувачки проблем е потребен уникатен фази контролер. За утврдување на наведените елементи, прилагодени за анализираното управување, мора да се кодира посебен компјутерски програм, односно неопходна е креативност и аналитичка и програмерска подготвеност на истражувачот на фази контролерот. При изработка на софтверот за фази контролерот може да се користат различни програмски јазици, како на пример MS FORTRAN, или други.



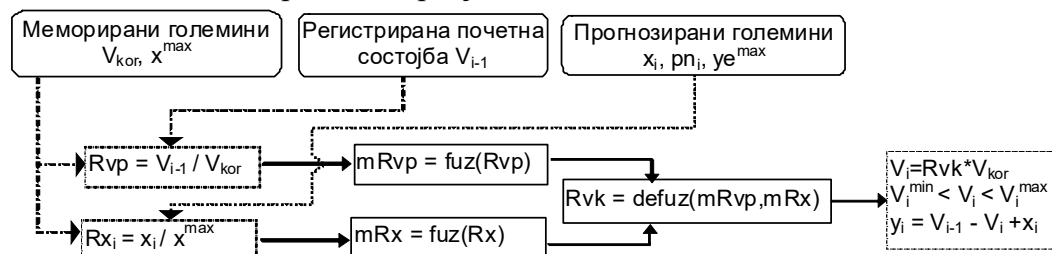
Сл. 7.12. Фази спознајни шеми (fuzzy cognitive map) за контрола на ВСС со акумулација (а - едноставна и б - сложена)

7.5.1. Фази систем

Моделите на фази контролерот за управување со водостопанскиот систем (едноставен - [слика 7.13](#) и сложен - [слика 7.13а](#)) се математичка формализација на логично, интуитивно, и апроксимативно размислување при реално управување со системот, според фази спознајните шеми прикажани на [слика 7.12](#). Ова управување со водостопанскиот систем со акумулација се реализира чекор по чекор, секвенционално, во согласност со новите информации за состојбите на системот.

Релевантни информации за донесување на одлука, на почетокот од временскиот интервал (месец, декада или ден), за начинот на управување со системот се: (1) почетната исполнетост на корисниот простор на акумулацијата; (2) прогноза за дотекувањата во акумулацијата; (3) прогноза за потребите за наводнување (и/или водоснабдување), и (4) прогноза за максималните потреби од снага и енергија на конзумот, што треба да бидат надополнети од разгледуваната ХЕЦ. Ако конзумот е доволно голем да го прими целокупното

месечно производство на електрична енергија од анализираната ХЕЦ, и ако генералната политика на МЕЕС е разумниот критериум за потполно користење на обновливите извори на енергија, тогаш прогнозата за максимално месечно производство на ЕЕ се сведува на горната граница на можното месечно производство на електрична енергија.



Сл. 7.13. Едноставен математички модел на фази контролер за управување со ВСС

При управувањето со ВСС не постојат остри, строго дефинирани закономерности, поради бројните неизвесности и нејасности, туку логично се наметнуваат приближни, интуитивни смерници или правила (за соодветната спознајна структура), од кои натаму се формализира базата на фази правила.

(I) Правила за релативна крајна исполнетост

Правилата за релативна крајна исполнетост на корисниот простор зависат од два фактори: (а) почетна исполнетост на акумулацијата и (б) дотекување во акумулацијата.

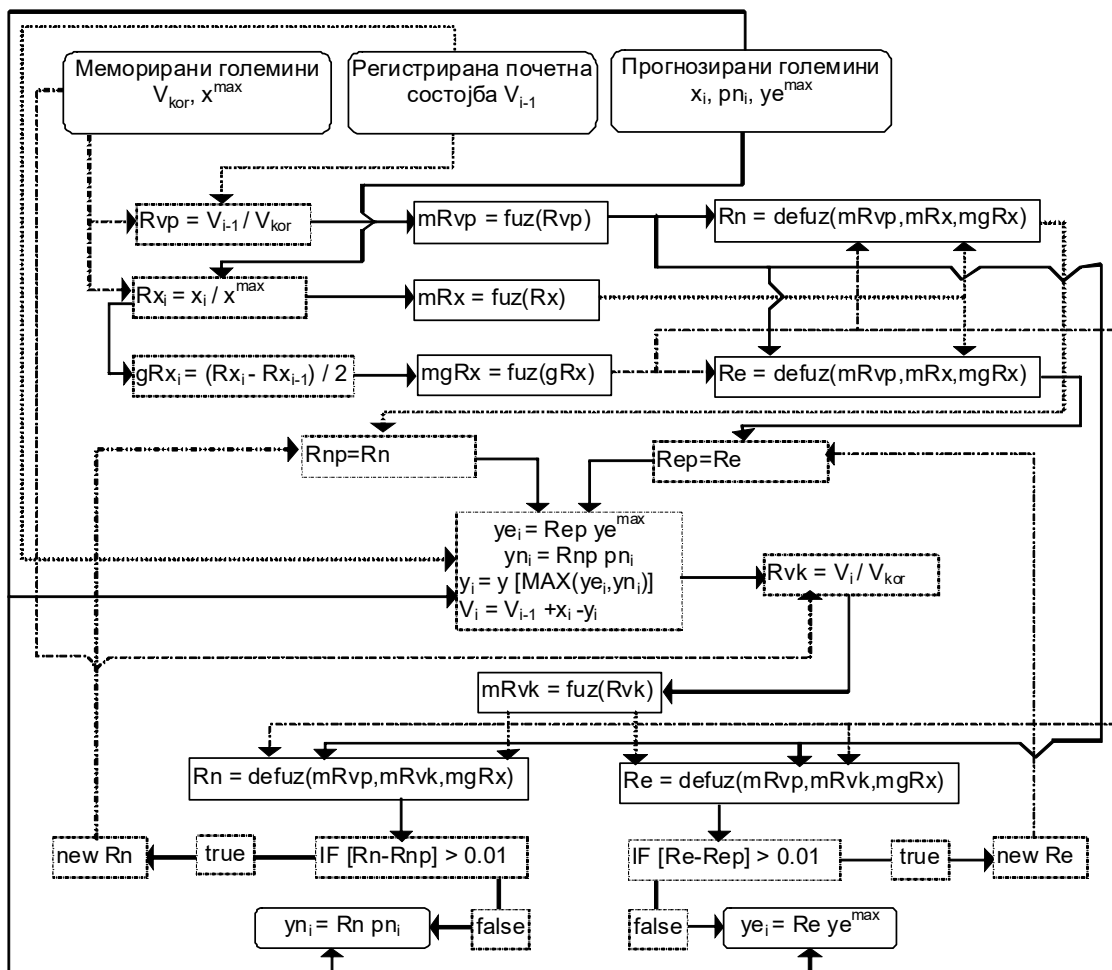
(а) *Почетна исполнетост на акумулацијата.* Ако на почеток на зимски месец, акумулацијата е многу полна, тогаш би требало да се добие средна крајна исполнетост. Тоа значи големо испуштање од акумулацијата при максимален притисок, за да се постигне максимално производство на електрична енергија. Ако е почетната исполнетост максимална за летен месец, тогаш крајната исполнетост треба да биде умерено голема, односно да се овозможи магационирање на водата и користење во зимските месеци. При мала почетна исполнетост потребна е средна крајна исполнетост, за да се овозможи полнење на акумулацијата.

Треба да се има предвид дека исполнетоста на акумулацијата не е константна категорија за сите месеци во текот на годината. Релативноста на поимот исполнетост на базенот, може да се согледа од фактот дека еден ист волумен во корисниот простор може да го подредиме како “многу полна акумулација”, (доколку се работи за зимски месец каде се очекува, според оптималното управување, изразена испразнетост на акумулацијата) и како “умерено празна акумулација”, (ако се работи за летен месец, кога се очекува висока исполнетост на базенот). За доносителот на одлука за управување со ВСС, влезната големина исполнетост на акумулацијата, има повредно и покорисно значење ако се опише со лингвистички варијабли, отколку ако се квантифицира со својата бројна вредност во m^3 . Примарните термини на варијаблата исполнетост, со кои се апроксимира влезната големина, како на пример: многу празна, умерено празна, средно исполнета, максимално полна; се претставуваат со фази множества кои се преклопуваат, бидејќи меѓу нив не постои остра граница. Понатаму, за секоја

вредност на влезната големина може да се определи вредноста на вистинитост, (во интервалот од 0 до 1), за “припаѓање” кон соодветно фази множество, односно за “задоволување” на исказот дека се апроксимира со соодветна лингвистичка варијабла. На пример, вредноста на исполнетоста на акумулацијата од 5 500 000 m³, во натамошното пресметување би можела да се проследи како акумулацијата е *умерено празна* со вредност на вистинитост 0.75 и *средно исполнета* со вредност на вистинитост 0.25.

(б) *Дотекување во акумулацијата.* Логично е да се предвидуваат поголеми вредности за крајната исполнетост во акумулацијата, доколку се поголеми вредностите за прогнозираното дотекување во акумулацијата. Кај дотекувањата, слично како и кај исполнетоста на акумулацијата, потребно е да се нагласи дека подредувањето на големината е во зависност од месецот, според веројатносните коридори на дотекувањата за историската низа на дотекувања. Една вредност за дотекувањето, за полноводен месец може да биде подредена како “умерено мало протекување”, а за месец што се очекува да биде сушен, како “изразито големо дотекување”.

Генерален заклучок би бил дека релативната крајна исполнетост на корисниот простор (1) изразито нелинеарно зависи од регистрираната почетната исполнетост на акумулацијата и (2) правопрпорционално зависи од големината на прогнозираното месечно дотекување.



Сл. 7.13а. Сложен математички модел на фази контролер за управување со ВСС

(II) Правила за степен на енергетското користење на водниот ресурс

Правилата за степен на енергетското користење на водниот ресурс, (кое зависи од два параметри: протекување и притисок), зависат од два фактори: (а) исполнетост на акумулацијата и (б) дотекување во акумулацијата.

(а) *Исполнетост на акумулацијата.* Ако акумулацијата е многу полна, тогаш ХЕЦ е оптоваран со максимален притисок, односно може да се ангажира максимална снага, па затоа логично е ХЕЦ да работи со полн капацитет, за да се постигне максимално производство на електрична енергија. Спротивно, ако акумулацијата е многу испразнета, ХЕЦ би работел со минимален притисок и можно е ангажирање на минимална снага, па затоа независно од протекувањата не може да се реализира рационално производство на ЕЕ. Во таков случај треба да се редуцира протекувањето низ турбините на ХЕЦ и да се овозможи полнење на акумулациониот базен.

(б) *Дотекување во акумулацијата.* Ако е големо дотекувањето во акумулацијата, тогаш е можно ХЕЦ да работи без редукција, бидејќи нема да дојде до интензивно празнење на акумулацијата и до намалување на работниот притисок. Дополнителен мотив за зголемено користење на ХЕЦ е да се елиминира опасноста од преливање, посебно ако исполнетоста во акумулацијата е во

близина на нормалното ниво. Важен елемент при следењето на дотекувањата, имајќи ја предвид инерцијалноста на феноменот на протекувања (месечни протечи за голема река и дневни протекувања за мал водотек), е градиентот на протекувањата, односно дали се работи за полноводен или за сушен период. При тоа, логично би било, ако се работи за тренд на зголемување на дотекувањето да се зголемат истекувањата низ ХЕЦ. И обратно, при намалување на дотекувањата внимателно да се смалат и протекувањата низ турбините, за да се избегне прекумерно спуштање на водното ниво во акумулацијата, со што ќе се доведи системот во состојба на нерационално искористување во следните временски интервали.

Генерален заклучок би бил дека степенот на енергетското користење на водниот ресурс пропорционално зависи од: (1) исполнетоста на акумулацијата, (од регистрираната почетна состојба и од реализираната на крајот од временскиот интервал); (2) големината на прогнозираното месечно дотекување, и (3) од градиентот на дотекувањата (разлика меѓу тековното прогнозирано дотекување и претходното регистрирано дотекување). Степенот на енергетското користење, потребно е да го следи оптималниот степен на енергетско користење, регистриран според оптималното управување со ВСС, и истиот е променлив во текот на месеците. Така на пример, ако со анализата се утврди дека степенот на користење е “средно голем” со вредност на вистинитост 0.25 и “среден” со вредност на вистинитост 0.75, тогаш за зимски месец каде се очекува големо ангажирање на ХЕЦ, според оптималното управување, можеби ќе се генерира степен на енергетско користење $Re = 0.65$, а за летен месец, каде се очекува мала оптовареност на ХЕЦ, можеби ќе се добие $Re = 0.25$.

(III) Правила за степен на користење на водниот ресурс за подмирување на потребите за наводнување

Правилата за степен на користење на водниот ресурс за подмирување на потребите за наводнување се поедноставни, споредени со соодветните за енергетско користење, и зависат од два фактори: (а) исполнетост на акумулацијата и (б) дотекување во акумулацијата.

(а) Исполнетост на акумулацијата. Ако акумулацијата е многу полна, тогаш нема потреба од воведување на рестрикции при задоволување на потребите за наводнување. Спротивно ако акумулацијата е многу испразнета, неопходно е штедење на водниот ресурс, за да не се случи во следните временски интервали да не може да се подмират ни минималните неопходни потреби за наводнување.

(б) Дотекување во акумулацијата. Ако е големо дотекувањето во акумулацијата, тогаш е можно задоволување на потребите за наводнување без редукација. И спротивно, ако дотекувањата се изразито мали треба да се предвиди одреден степен на рестриција, односно да се штеди акумулираната вода. Друг важен елемент при следењето на дотекувањата, секако е градиентот на протекувањата, односно дали се работи за воден или за сушен период. При тоа, логично би било, ако се работи за тренд на зголемување на дотекувањето да се намалат рестрикциите, и обратно, при намалување на дотекувањата внимателно да се смалат и количините на вода испорачани за потребите на наводнувањето.

Генерален заклучок би бил дека степенот на користењето на водниот ресурс за потребите на наводнувањето пропорционално зависи од: (1) исполнетоста на акумулацијата, (од регистрираната почетна состојба и од реализираната на крајот од временскиот интервал); (2) големината на прогнозираното месечно дотекување, и (3) од градиентот на дотекувањата (разлика меѓу тековното прогнозирано дотекување и претходното регистрирано дотекување). Степенот на користење на водниот ресурс за наводнување треба да биде во согласност со граничните вредности за редукција при подмирувањето на потребите за наводнување кои може да се толерираат, односно не предизвикуваат ненадоместливи штети.

7.5.2. Идентификација на влез и излез во системот и нивниот ранг

Кај едноставниот контролер може да се избере дека излезната големина, релативната крајна исполнетост R_{vk} , зависи од: (1) регистрираниот почетен волумен R_{vp} и (2) предвиденото дотекување R_x .

Кај сложениот контролер, најголемо влијание врз изборот на енергетското искористување на водниот ресурс има осреднетата исполнетост на акумулацијата, односно средниот притисок на ХЕЦ, добиена како аритметичка средина од почетната и крајната состојба на системот во разгледуваниот временски интервал. Во крајната исполнетост на акумулацијата се содржани: (1) регистрираниот почетен волумен, (2) предвиденото дотекување и (3) избраното управување со системот со дејство на повратна спрега. Затоа, излезната големина, (релативното енергетско користење Re), треба да биде во функционална зависност од три влезни големини: (1) релативната почетна исполнетост R_{vp} , (2) релативната крајна исполнетост R_{vk} и (3) градиентот на релативното дотекување gR_x . Бидејќи големините Re и R_{vk} меѓусебе се спрегнати, неопходен е нумерички итеративен циклус, каде со одредена задоволителна точност ќе се пресмета излезната големина Re . Почетната вредност на Re , со која се влегува во итеративната пресметка, усвоено е дека зависи од три големини: (1) релативна почетна исполнетост R_{vp} , (2) релативно дотекување R_x и (3) градиентот на релативното дотекување gR_x . Управувањето со ВСС за подмирување на потребите за наводнување се усвојува на сличен начин. Така, врз излезната големина, степенот (или коефициентот) на користење на водата за наводнувањето R_n , влијаат трите влезни големини: R_{vp} , R_{vk} и gR_x . Влијанието на крајната исполнетост може да се согледа од следните искази:

- (1) малиот или “оптимистички” степен на редукција може да предизвика прекумерно празнење на акумулацијата, и во следниот временски интервал да не може да се задоволат ни минималните потреби за наводнување, и
- (2) големиот или “песимистички” степен на редукција, може да доведе до прекумерно полнење на акумулацијата и неискористено преливање во следниот временски чекор.

Затоа, информацијата за R_{kv} , со дејство на повратна спрега, има големо значење при одредувањето на R_n . Почетната вредност на R_n , со која се влегува во итеративната пресметка зависи од три големини: (1) релативна почетна исполнетост R_{vp} , (2) релативно дотекување R_x , и (3) градиент на релативното дотекување gR_x .

При определувањето на рангот на влезните и излезните големина, поради поголема генералност на моделот и појасна прегледност при пресметувањето, наведените големина се заменети со соодветни релативни (бездимензионални) вредности:

- релативна почетна исполнетост R_{vp} :

$$0.0 \leq R_{vp} = V_{i-1} / V_{kor} \leq 1.0 \quad (7.16)$$

- релативно дотекување R_x :

$$0.0 \leq R_{xi} = x_i / x_{max} \leq 1.0 \quad (7.17)$$

- градиент на релативно дотекување gR_x :

$$-1.0 \leq gR_x = R_{xi} - R_{xi-1} \leq 1.0 \quad (7.17)$$

- релативна крајна исполнетост R_{vk} :

$$0.0 \leq R_{vk} = V_i / V_{kor} \leq 1.0 \quad (7.18)$$

- степен на енергетско користење Re :

$$0.0 \leq Re^{min} \leq Re = y_{ei} / y_{e^{max}} \leq 1.0 \quad (7.19)$$

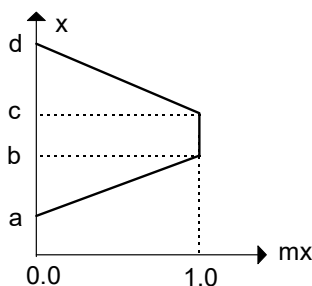
- степен на задоволување на потреби за наводнување R_n :

$$(0.5 \div 0.7) \leq R_n^{min} \leq R_n = y_{ni} / p_{ni} \leq 1.0 \quad (7.20)$$

Каде што: V_{i-1} и V_i се почетен и краен волумен, V_{kor} е корисен простор во акумулацијата; x_i е прогнозирано дотекување, а x_{max} е максимално забележано дотекување од историската низа; y_{ei} и y_{ni} се испораките од акумулацијата за енергетика и наводнување; $y_{e^{max}}$ е максималното можно енергетско користење на водниот ресурс, и p_{ni} е предвидената потреба за наводнување.

7.5.3. Функции на припадност

Влезните и излезните големина на фази системот (лингвистички или фази варијабли) се апроксимирани со примарни термини (фази множества), кои се опишани со трапезни фази броеви. Трапезниот фази број, претставен на [слика 7.14](#), се карактеризира со 4 параметри: a , b , c и d , по растечки редослед, на ординатната оска. На ординатната оска се нанесува вредноста “ x ” на големината што се опишува со фази варијабли, а на апсцисата е вредноста на вистинитост “ mx ”, од 0.0 до 1.0.

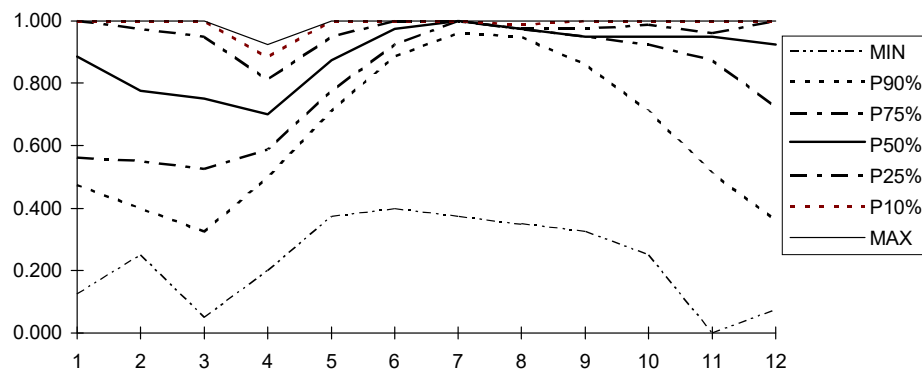


Сл. 7.14. Трапезен фази број

Големината на вредноста на вистинитост mx се пресметува со користење на следната условна релација:

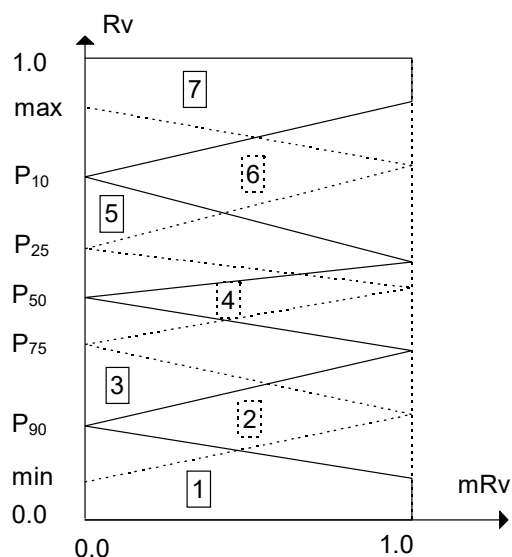
$$mx = \begin{cases} 0.0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1.0 & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & c < x \leq d \\ 0.0 & d < x \end{cases} \quad (7.21)$$

Големината *релативна исполнетост* (почетна или крајна) е заменета со седум фази множества, (опишани со трапезни фази броеви), кои одговараат на следните состојби по однос на исполнетоста на акумулацијата: (1) минимална, (2) празна, (3) умерено празна, (4) средно исполнета, (5) умерено полна, (6) полна, и (7) максимална, кои што се различни за секој месец.



Сл. 7.15. Веројатносни коридори на оптимална релативна исполнетост на почеток на месец, за одреден волумен на корисен простор $V_{KOR} = \dots 10^6 \text{ m}^3$

Изборот на бројот на примарните термини и параметрите на фази множествата е интуитивен проблем за било кој фази систем, а во конкретниот случај искористени се оптималните веројатносни коридори на волуменот во корисниот простор на акумулацијата (слика 7.15), добиени со оптималното управување при реализација на историската низа на дотекувањата, според шемата на слика 7.16. Вредностите на ординатната оска ги означуваат веројатностите да бидат надминати одредени релативни исполнетости. Со користење на наведената шема, параметрите на фази множествата, (кои се различни за секој месец), генерираат вредности според табела 7.1.



Сл. 7.16. Шема за пресметување на параметри на фази множества на големината релативна исполнетост

Големината *релативно дотекување* е претставена со седум фази множества, (описани со трапезни фази броеви), кои одговараат на следните состојби по однос на дотекувањето во акумулацијата: (1) минимално, (2) мало, (3) умерено мало, (4) средно дотекување, (5) умерено големо, (6) големо, и (7) максимално, кои што се различни за секој месец.

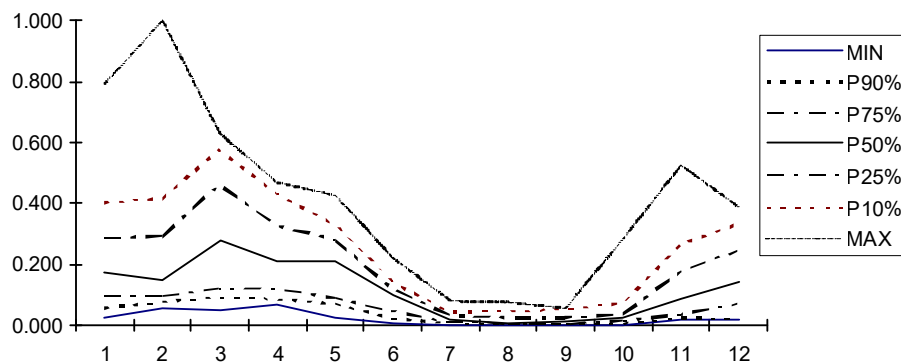
За изборот на параметрите на фази множествата во конкретниот случај искористени се пробабилистичките коридори на дотекувањата во акумулацијата при реализација на историската низа на дотекувањата (слика 7.17). Вредностите на параметрите на фази броевите се генерираат на аналоген начин, како што е наведено во табела 7.1.

Таб. 7.1. Генерирање на вредности за параметри на фази множества за апроксимација на лингвистичка - фази варијабла релативна исполнетост на акумулацијата

Состојба (фази множество)	a	b	c	d
(1) минимална исполнетост	0.0	0.0	min=P _{98.75%}	P _{90%}
(2) празна акумулација	min =P _{98.75%}	P _{90%}	P _{90%}	P _{75%}
(3) умерено празна акумулација	P _{90%}	P _{75%}	P _{75%}	P _{50%}
(4) средно исполнета акумулација	P _{75%}	P _{50%}	P _{50%}	P _{25%}
(5) умерено полна акумулација	P _{50%}	P _{25%}	P _{25%}	P _{10%}
(6) полна акумулација	P _{25%}	P _{10%}	P _{10%}	max =P _{1.25%}
(7) максимална исполнетост	P _{10%}	max=P _{1.25%}	1.0	1.0

Големината *градиент на релативно дотекување* е заменета со три фази примарни термини, (описани со трапезни фази броеви), кои одговараат на следните состојби по однос на трендот на дотекувањето во акумулацијата: (1) негативен, или намалување на дотекувањата; (2) нулти, или константни дотекувања, и (3) позитивен, или зголемување на дотекувањата; кои што се различни за секој месец. Вредностите на параметрите на фази броевите се

генерираат според табела 7.2, каде најголема тежина е дадено на позитивниот тренд на дотекувањата, со што однапред се преферираат поголеми вредности на степените на користење на водниот ресурс, (излезните големина на фази системот).



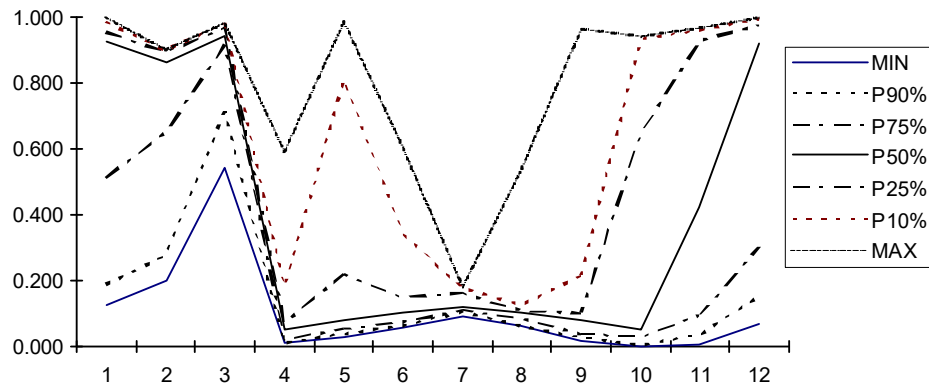
Сл. 7.17. Веројатносни коридори на релативни историски дотекувања во акумулацијата на хипотетичкиот ВСС, за оредено $X_{MAX} = \dots 10^6 \text{ m}^3 / \text{mes}$

Таб. 7.2. Генерирање на вредности за параметри на фази броеви на големината градиент на релативно дотекување

Состојба (фази множество)	a	b	c	d
(1) негативен	-1.00	-1.00	-0.60	-0.40
(2) нулти	-0.60	-0.40	0.00	0.35
(3) позитивен	0.00	0.35	1.00	1.00

Излезната големината *степен или коефициент на енергетското користење на водниот ресурс* е апроксимирана со седум фази множества, (описани со трапезни фази броеви), кои одговараат на следните состојби по однос на протекувањето низ турбините на ХЕЦ: (1) минимално, (2) мало, (3) умерено мало, (4) средно, (5) умерено големо, (6) големо, и (7) максимално; кои што се различни за секој месец.

За изборот на вредностите на параметрите на фази броевите се користат оптималните веројатносни коридори на степенот на енергетското користење, (слика 7.18), добиени со оптималното управување при реализација на историската низа на дотекувањата, аналогно на табелата 7.1.



Сл. 7.18. Веројатносни коридори на оптимален степен на енергетско користење на ВСС, за одредено $Y_{MAX}^E = \dots 10^6 \text{ m}^3 / \text{mes}$

Излезната големината *степен или коефициент на користење на водниот ресурс за наводнување* е апроксимирана со седум фази множества, (опишани со трапезни фази броеви), кои одговараат на следните состојби по однос на рестрикциите при задоволувањето на потребите за наводнување: (1) VII степен на рестрикција, (2) VI степен на рестрикција, (3) V степен на рестрикција, (4) IV степен на рестрикција, (5) III степен на рестрикција, (6) II степен на рестрикција и (7) I степен на рестрикција. Вредностите на параметрите на фази броевите би можело да се генерираат според [табела 7.3](#).

Таб. 7.3. Генерирање на вредности за параметри на фази броеви на големината степен на користењето на водата за наводнување

Состојба (фази множество)	a	b	c	d
(1) VII степен на рестрикција	0.65	0.70	0.70	0.75
(2) VI степен на рестрикција	0.70	0.75	0.75	0.80
(3) V степен на рестрикција	0.75	0.80	0.80	0.85
(4) IV степен на рестрикција	0.80	0.85	0.85	0.90
(5) III степен на рестрикција	0.85	0.90	0.90	0.95
(6) II степен на рестрикција	0.90	0.95	0.95	1.00
(7) I степен на рестрикција	0.95	1.00	1.00	1.05

7.5.4. База на фази правила

Во математичкиот модел на едноставниот фази контролер за управување со водостопански систем ([слика 7.13](#)) е дефинирана една излезна големина (релативна крајна исполнетост) која се определува во процес на дефазификација од две влезни големини (релативна почетна исполнетост и релативно дотекување). Усвоено е крајната исполнетост да биде различна за зимски и летен месец, што значи дека базата на фази правила може да се претстави, во кондензирана форма, со дводимензионална логичка таблица, ([табела 7.4](#)) која претставува прва, или почетна апроксимација за логичките правила за управување со ВСС. Излезната големина е дефинирана со 7 фази правила, бидејќи е апроксимирана со 7 фази множества.

Во математичкиот модел на сложениот фази контролер за управување со водостопански систем (слика 7.13а) се дефинирани 4 излезни големина кои се определуваат во процес на дефазификација. Тоа значи дека базата на фази правила се состои од 4 издвоени делови. Бидејќи е предвидено сите 4 излезни големина да зависат од три влезни големина, сите 4 сегменти од базата на фази правила може да се претстават, во кондензирана форма, со тридимензионални логички табели, (табели 7.5, 7.5а, 7.6 и 7.6а, кои претставуваат прва, или почетна апроксимација за логичките правила за управување со ВСС). Сите 4 излезни големина се дефинирани со 7 фази правила, бидејќи се апроксимирани со 7 фази множества.

Таб. 7.4. Логичка таблица за релативна крајна исполнетост $Rvk = \text{defuz}(Rvp, Rx)$

	зимски месец							летен месец						
$Rx =$	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
$Rvp=1$	1	2	2	3	3	4	4	1	2	2	3	3	4	4
$Rvp=2$	2	2	3	4	4	4	5	2	2	3	3	4	4	5
$Rvp=3$	3	3	4	4	5	5	5	3	3	4	4	5	5	5
$Rvp=4$	4	4	5	5	5	5	5	4	4	5	5	5	6	6
$Rvp=5$	4	4	5	5	5	5	5	4	4	5	5	5	6	6
$Rvp=6$	4	5	5	5	5	5	6	4	5	5	6	6	6	6
$Rvp=7$	4	5	5	5	5	6	7	4	5	5	6	6	6	7

Таб. 7.5. Логичка таблица за почетна вредност на степен на енергетско користење $Re = \text{defuz}(Rv, Rx, gRx)$

	$gRx1$							$gRx2$							$gRx3$						
$Rx =$	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
$Rv1$	1	1	1	1	1	2	3	1	1	1	1	2	3	4	1	1	1	2	3	4	5
$Rv2$	2	2	2	2	2	3	4	2	2	2	2	3	4	5	2	2	2	3	4	5	6
$Rv3$	3	3	3	3	3	4	5	3	3	3	3	4	5	6	3	3	3	4	5	6	7
$Rv4$	4	4	4	4	4	5	6	4	4	4	4	5	6	7	4	4	4	5	6	7	7
$Rv5$	5	5	5	5	5	6	7	5	5	5	5	6	7	7	5	5	5	6	7	7	7
$Rv6$	6	6	6	6	6	7	7	6	6	6	6	7	7	7	6	6	6	7	7	7	7
$Rv7$	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7

Таб. 7.5а. Логичка таблица за почетна вредност на степен на користење на вода за наводнување $Rn = \text{defuz}(Rv, Rx, gRx)$

	$gRx1$							$gRx2$							$gRx3$						
$Rx =$	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
$Rv1$	1	1	1	2	2	3	4	1	1	2	2	3	4	5	2	2	3	4	4	5	6
$Rv2$	1	2	2	3	3	4	5	2	2	3	3	4	5	6	3	3	4	5	5	6	7
$Rv3$	2	3	3	4	4	5	6	3	3	4	4	5	6	7	4	4	5	6	6	7	7
$Rv4$	3	4	4	5	5	6	7	4	4	5	5	6	7	7	5	5	6	7	7	7	7
$Rv5$	4	5	5	6	6	7	7	5	5	6	6	7	7	7	6	6	7	7	7	7	7
$Rv6$	5	6	6	7	7	7	7	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
$Rv7$	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7

Користењето на наведените логични тродимензионални табели е на следниот начин, (фази правило број 1, од табела 7.5):

IF {[mRv1∩mRx1∩mGRx1] U [mRv1∩mRx2∩mGRx1]...U...[mRv1∩mRx3∩mGRx3]}
THEN mRe1

АКО {[Rv е Rv1 И Rx е Rx1 И GRx е GRx1] ИЛИ [Rv е Rv1 И Rx е Rx2 И GRx е GRx1]...ИЛИ... [Rv е Rv1 И Rx е Rx3 И GRx е GRx3]} ТОГАШ Re е Re1

Математичката форма на “тежина” на фази правило број 1, (релација (7.21):

$$mRe1 = \text{MAX} \{ \text{MIN}[mRv1, mRx1, mGRx1], \text{MIN}[mRv1, mRx2, mGRx1], \dots, \text{MIN}[mRv1, mRx3, mGRx3] \} \quad (7.21)$$

Таб. 7.6. Логичка таблица за степен на енергетско користење на водата
Re=defuz(Rv,Rvk,gRx)

	gRx1							gRx2							gRx3						
Rvk=	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
Rv1	1	1	1	1	1	2	3	1	1	1	2	3	4	5	1	2	3	3	4	5	6
Rv2	1	1	1	1	2	3	4	1	1	2	3	3	4	5	2	3	3	4	5	6	7
Rv3	1	1	1	2	3	3	4	1	2	3	3	4	5	6	3	3	4	5	6	7	7
Rv4	1	1	2	3	3	4	5	2	3	3	4	5	6	7	3	4	5	6	6	7	7
Rv5	1	2	3	3	4	5	6	3	3	4	5	6	6	7	4	5	6	6	7	7	7
Rv6	2	3	3	4	5	6	6	4	4	5	6	6	7	7	5	6	7	7	7	7	7
Rv7	3	4	4	5	6	6	7	5	5	6	7	7	7	7	6	7	7	7	7	7	7

Таб. 7.6а. Логичка таблица за степен на користење на вода за наводнување
Rn=defuz(Rv,Rvk,gRx)

	gRx1							gRx2							gRx3						
Rvk=	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
Rv1	1	1	1	2	2	3	4	1	2	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	7	7
Rv2	1	1	2	2	3	4	5	2	2	3	4	5	6	7	3	3	4	5	6	7	7
Rv3	1	2	2	3	4	5	6	2	3	3	4	5	6	7	4	4	5	6	7	7	7
Rv4	2	2	3	3	4	5	6	3	4	4	5	6	7	7	5	5	6	7	7	7	7
Rv5	2	3	4	4	5	6	7	4	5	5	6	7	7	7	6	6	7	7	7	7	7
Rv6	3	4	5	5	6	7	7	5	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
Rv7	4	5	6	6	7	7	7	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7

7.5.5. Верификација на фази контролерот

При верификацијата на фази контролерот се наметнуваат две суштински прашања: (1) Што да се усвои за критериум за квалитет на контролерот? и (2) Како да се подобри (усоврши) контролерот?

Во решавањето на задачата на оптимална анализа на системот, усвоен е критериум за максимизација на средногодишното производство на пондерисана електрична енергија E_p , при задоволување на бараните обезбедености во подмирувањето на приоритетните водокорисници. Затоа како критериум за квалитет на фази контролерот, (со кој се овозможува реално - чекор по чекор - управување со ВСС), е усвоен степенот на достигнување на идеалното

оптимално (максимално) годишно пондерисано производство на ЕЕ, како горна граница на ефикасноста на управувањето.

Пристапот за изработка на понапреден (попаметен) фази контролер за управување со ВСС е интуитивен и субјективен. Тој зависи од планерот на моделот базиран на фази логика и се сведува на:

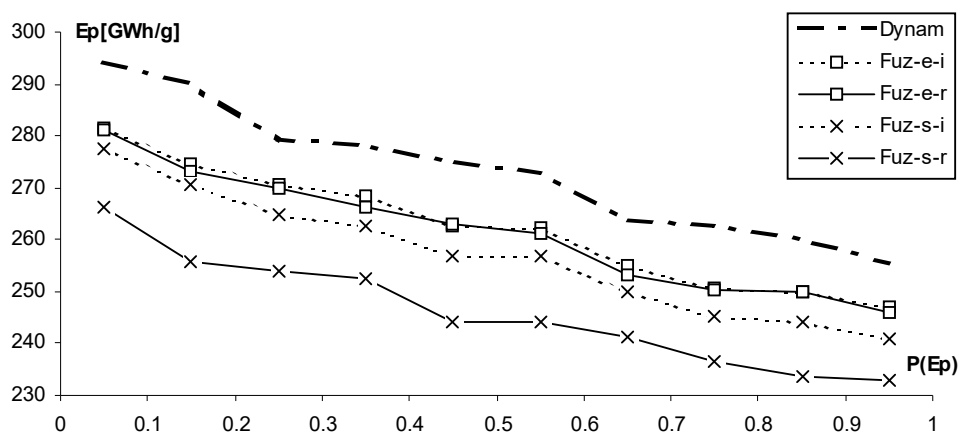
- ✓ Промена на гносеолошката шема на фази контролерот. Затоа се развиени и споредени два контролери базирани на едноставна и сложена спознајна структура.
- ✓ Тарирање на параметрите на фази множествата за влезните и излезните фази варијабли. За прва итерација на параметрите на фази множествата може да се користат веројатносните коридори од оптималното управување со системот при реализација на историските низи (единственото управувачко искуство со системот). За следни “подобрувања” на параметрите логично би било да се направи анкета за да се искористи искуството на експерти за управување со ВСС.
- ✓ Промена на базата на фази знаење (додавање, одземање и менување на фази правила во логичките таблици: 7.4, 7.5, 7.5а, 7.6 и 7.6а) според досегашното искуство за управувањето со ВСС со акумулации.

* * *

Со користење на фази контролерот степенот на достигнување на оптималното (идеално) управување, за конфигурација како на разгледуваниот хипотетички ВСС, би требало да биде поголем од $(90.0 \div 95.0)\%$, што би бил доказ за успешноста (квалитетот) на фази контролерот. Дополнително намалување на ефикасноста на реалното управување се добива поради несовршеноста на прогнозата на влезните серии во системот за тековниот временски интервал. Со користење на едноставни регресиони модели, (со повеќестепенена линеарна корелација), за предвидување на дотекувањата и потребите за наводнување, ефикасноста на реалното управување може да се очекува да се намали, но да биде поголемо од $(85.0 \div 90.0)\%$.

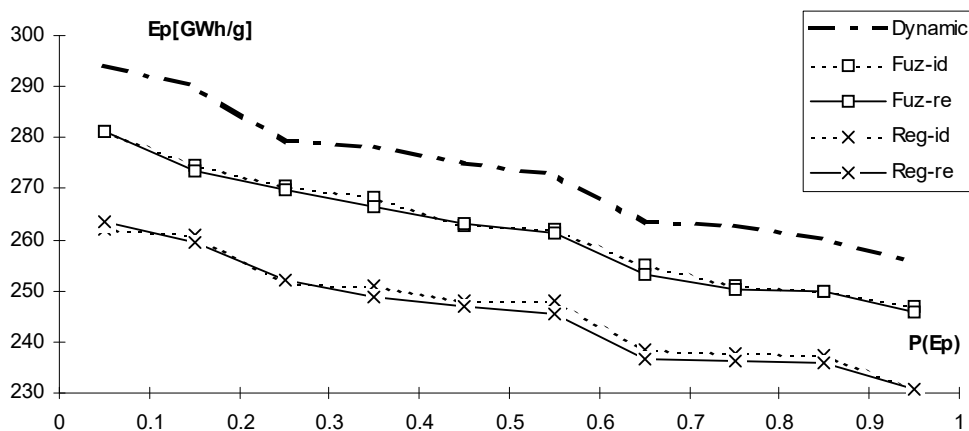
* * *

Во продолжение се наведени резултатите од тестирањето на фази контролерот на реален ВСС. Со користење на историските низи, при оптималното управување средногодишното пондерисано производство на ЕЕ од ХЕЦ “Козјак” изнесува 270.486 GWh/god. Овде треба да се подвлече дека пондерисаното годишно производство на ЕЕ е збир од летното и отежнато зимско производство, и е многу поголемо од годишното производство. Со користење на правилата од оптималното управување и после калибрирањето на базата на фази правила, со едноставниот фази контролер се остварува производство од 262.890 GWh/god или степен на достигнување на оптималното производство од 0.972, додека со сложениот фази контролер се остварува производство од 256.486 GWh/god или степен на достигнување на оптималното производство од 0.948. Овие вредности, како и податоците графички презентирани на [слика 7.18](#) најдобро укажуваат на предноста на едноставниот фази контролер над сложениот (за анализираниот ВСС).



Сл. 7.18. Кумулативна веројатност на просечно средно-годишно пондерисано производство на ЕЕ, за ВСС “Козјак”, при оптимално и симулационо управување (со едноставен е и сложен s фази контролер) за синтетички сценарија во експлоатација

Со рафинираниот регресионен контролер (за историските низи) се добива 242.495 GWh/god, односно степен на достигнување на оптималното производство 0.897. Овие вредности, како и резултатите од споредбата на пондерисаното средногодишно производство на ЕЕ, добиени со оптимално и симулационо управување за ВСС “Козјак”, со користење на фази и регресионен контролер, за 10 синтетички сценарија во иднина, (графички презентирани на [слика 7.18a](#)) најдобро укажуваат на предноста на фази моделот над конвенционалниот контролер (за анализираниот ВСС).



Сл. 7.18a. Кумулативна веројатност на просечно средно-годишно производство на ЕЕ, за ВСС “Козјак”, при оптимално и симулационо управување (со фази и регресионен контролер) за синтетички сценарија во експлоатација

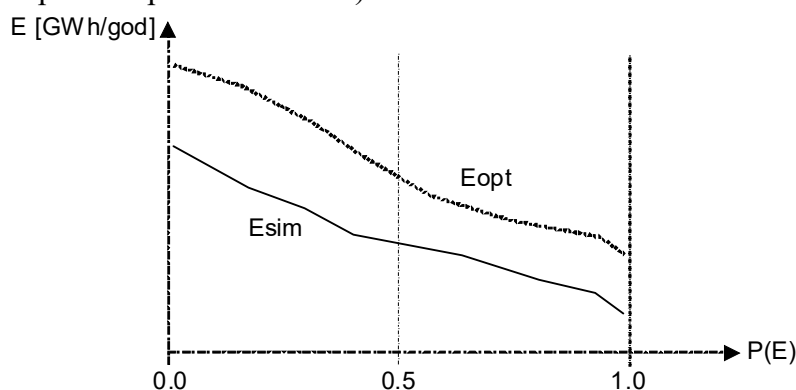
* * *

Ако се прифати степенот на достигнување на идеалното управување како задоволителен, тогаш фази контролерот и прогностичкиот модул се применуваат, (тестираат), на одреден број генерирани (вештачки), сценарија по однос на дотекувањата и потребите на приоритетните корисници. Овие

сценарија се можни во идниот експлоатационен период и се рамноправни меѓу себе, односно се со иста веројатност на појава.

Пробабилитичката презентација на резултатите од пресметувањето, (за анализираните вештачки сценарија), треба да се прикажи во форма како што е презентирано на [слика 7.19](#). Со реалното управување треба да се добие просечен степен на достигнување на идеалното управување во прифатливи граници.

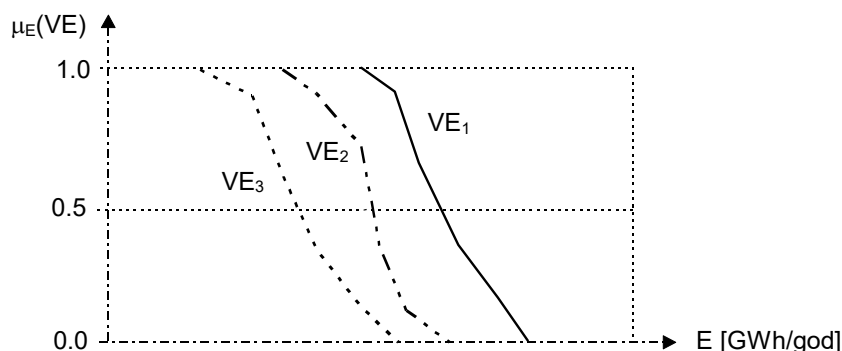
Намалувањето на ефикасноста на реалното управување со ВСС за симулираните сценарија, споредено со историските низи, се должи на: (1) финото подесување на фази контролерот е со користење на информациите од оптималното управување при реализација на историските низи (единственото управувачко искуство со системот) и (2) регресионите коефициенти на прогностичкиот модел се генерирани со користење на историските низи (единствените реализирани големина).



Сл. 7.19. Кумулативна веројатност на просечни средногодишни производства на ЕЕ при идеално (оптимално) и реално (симулационо) управување со прогнозиран влез за вештачки сценарија во идниот експлоатационен период

Може да се очекува дека прогностичкиот модул во експлоатација на ВСС ќе се подобри, бидејќи ќе се зголеми бројот на набљудуваните хидрометеоролошки големина (врнежи, испарување, инфилтрација), кои се во корелативна зависност со прогнозираната големина, а биле недостапни за планерот во тек на планирање на ВСС.

Целото пресметување треба се повтори за сите варијанти на ВСС добиени за различни вредности на физичките параметри на ВСС, (големина на корисен простор во акумулацијата, инсталирано протекување на ХЕЦ, ...). За сите ќе се определат соодветните фази множества на просечното годишно производство на пондерисана електрична енергија, (прикажани во форма како на [слика 7.20](#), каде се презентирани резултати од реално управување со ВСС, со потполно задоволување на приоритетните водокорисници, за претпоставени 3 варијанти на хидројазелот, добиени со варирање на неговите физички параметри).

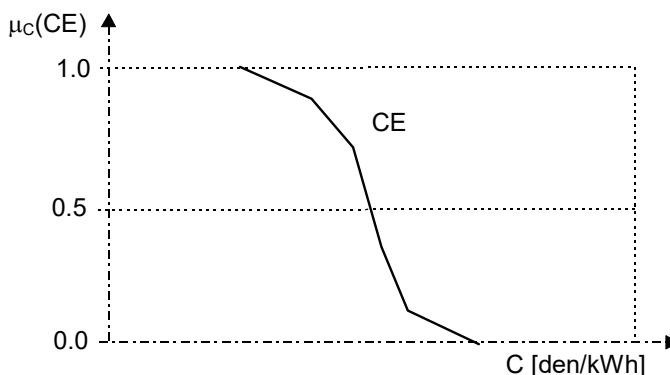


Сл. 7.20. Фази множества на реално производство на ЕЕ за различни варијанти на ВСС

7.6. Рангирање на фази броеви

Ако при решавање на задачата на синтеза на ВСС, влезните големина во избраната процедура за оптимизација (поради неодреденоста) се дефинираат со фази броеви, тогаш и резултатите, (вредностите на целната функција) ќе бидат изразени во вид на соодветни фази броеви (слика 7.24). Во тој случај, неопходно е рангирање на фази броевите, во согласност со усвоениот критериум за оптимална синтеза (максимизација или минимизација на целната функција).

* * *

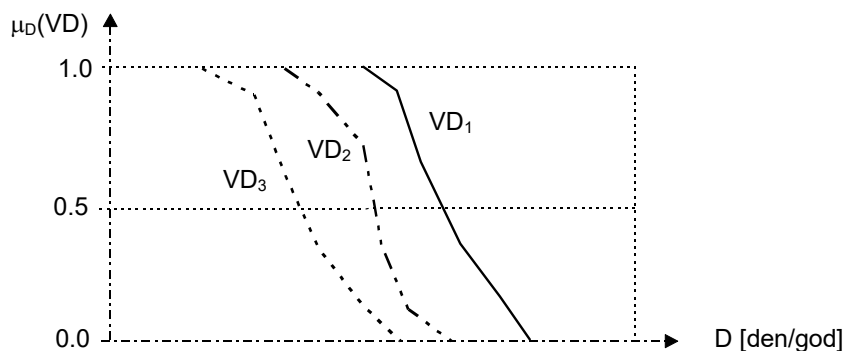


Сл. 7.21. Фази концепт на цена на ЕЕ во експлоатација

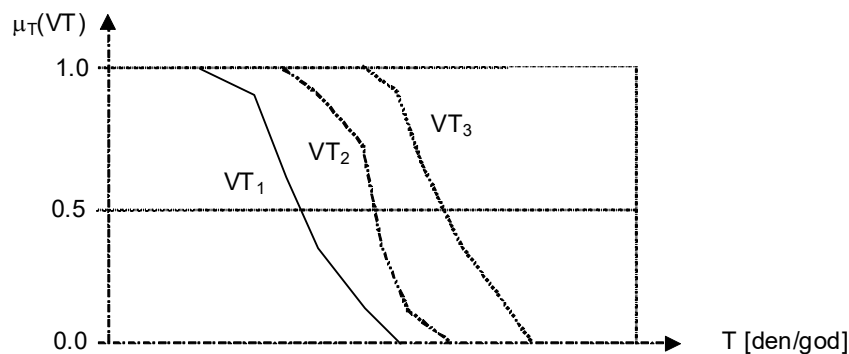
При дефинирањето на влезната големина - добивки од производство на ЕЕ, за решавање на конвенционалната задача на оптимална синтеза, треба да се има предвид дека: (I) вредноста на електричната енергија во експлоатациониот период е неизвесна големина и најреално се опишува со фази множество, (слика 7.21) и (II) годишните добивки од ХЕЦ, за трите варијанти на ВСС, се добиваат во облик на фази множества (слика 7.22), како производ (релација 7.15) на фази множествата: просечно реално производство на ЕЕ (слика 7.20) и цена на ЕЕ во експлоатација (слика 7.21).

Годишните трошоци на ХЕЦ се збир од: (1) алоцираните заеднички трошоци (за брана и придружни објекти, при потполно задоволување на приоритетните корисници) и (2) сопствените трошоци на ХЕЦ (сума на трошоци за хидроенергетски објекти и дополнителни трошоци од браната).

При определување на годишните трошоци постои изразена неопределеност поради: (а) пресметувањето на количините на градежни и електромашински работи, (б) единичните цени за различните позиции за одредување на пресметковната вредност, (в) пресметување на инвестициона вредност, (големина на интеркаларна камата, односно динамика на градба или каматна стапка во тек на градба) и (г) пресметување на експлоатациони трошоци (ануитет, амортизација, осигурување итн.). Затоа годишните трошоци на ХЕЦ, за различни варијанти, може единствено реално да се претстават со фази множества, (слика 7.23), добиени со примена на релациите од фази алгебра (релации 7.15).

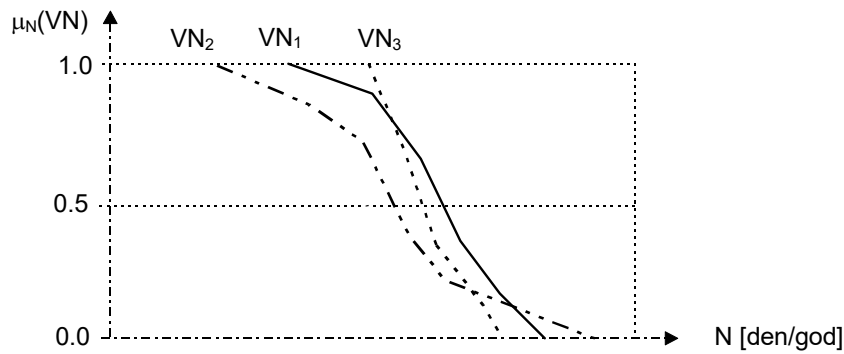


Сл. 7.22. Фази множества на добивки од производство на ЕЕ, за различни варијанти



Сл. 7.23. Фази множества за трошоци на ХЕЦ, за различни варијанти

Критериум на синтеза на ВСС (избор на оптимални параметри) се усвојува максимизација на годишните нето добивки на ХЕЦ, при задоволување на приоритетните водокорисници. Годишните нето добивки од ХЕЦ за разни варијанти се добиваат во форма на фази множества, (слика 7.24), добиени со фази релација одземање (релации 7.15) на фази множествата добивки (слика 7.22) и трошоци (слика 7.23).



Сл. 7.24. Фази множества на концептот нето добивки, за различни варијанти на ХЕЦ

* * *

Во задачите на планирање на ВСС погодна е методата на линеарно рангирање на нормални фази броеви (Djordjević, 1994). Оваа метода има 3 критериуми, кои се испитуваат по следниот редослед:

I критериум: поместување на фази бројот “А”, во однос на нормален број “Р”, кое се определува со следната релација:

$$R(A,p) = 1/2 [R_L(A,p) + R_D(A,p)] \quad (7.22)$$

каде што: $R_L(A,p)$ е површина ограничена со бројот “Р” и левата страна на “А”, а $R_D(A,p)$ е површина ограничена со бројот “Р” и десната страна на фази бројот “А”.

II критериум: модул на фази бројот “А”, кој се определува со следната релација:

$$|A| = 1/2 (a_2 + a_3) \quad (7.23)$$

III критериум: дивергенција на фази бројот “А”, која се определува со следната релација:

$$\partial A = a_4 - a_1 \quad (7.24)$$

Ако фази броевите се субнормални ($m_A(a_2) < 1.0$), тогаш сите критериуми треба да се помножат со: $m_A(a_2)$.

Ако фази броевите се сингуларни ($\partial A = 0.0$), тогаш се користи следниот критериум за рангирање:

$$a * m_A(a) \quad (7.25)$$

8. Користена литература

1. Agroskin I., 1969. "Hidraulika", Zagreb
2. Baošić M., Đorđević B., 1989. "Primena simulacionih modela u operativnom upravljanju slozenim sistemom rezgranate strukture", Vodoprivreda 21/122, 665-678, Beograd
3. Barron J.J., 1993. "Putting Fuzzy Logic into Focus", BYTE April, p.111-118.
4. Basic B., 1996. "Hydrology and Collecting Canal Water Quality of Hydrosystem Strezevo", III Conference on Water Management in Republic of Macedonia, Struga, Proceedings p.151-160
5. Bellman R.E., Zadeh L.A., 1970. "Decision-Making in a Fuzzy Environment", Management Science, Vol. 17(4) December, p.141-164
6. Bishop, C.M., 1996, "Neural Networks for Pattern Recognition", Clarendon Press, Oxford
7. Biswas A.K., 1976., "Systems Approach to Water Management", Kosaido Printing Co., LTD, Tokyo, Japan
8. Bogardi I., Bardossy A., Duckstein L., 1983. "Regional Management of an Aquifer for Mining Under Fuzzy Enviromental Objectives", Water Resources Research (AGU), Vol. 19(6), p.1394-1402
9. BOSS, 1999.a "ARSP, Acres Reservoir Simulation Program", User's Manual
10. BOSS, 1999.b "DAMBRK, Hydrodynamic Flood Routing", User's Manual, Version 3.0
11. Braga B.P.F., 1998. "Sustainable water resources development in emergent economies", VI International Symposium on water management and hydraulic engineering, Dubrovnik, Croatia, Proceedings Vol.1, p.19-36
12. Brown J. G., 1965. "Hydro electric engineering practice, Vol. I, II and III", London
13. Chunhua D., Bogardy I.,..., 1995. "Steady state groundwater flow simulation with imprecise parameters", Water Resources Research (AGU), Vol.31(11) November, p.2709-2719.
14. Connor J.J., Brebbia C.A., 1980. "Finite Element Techniques for Fluid Flow", Newnes-Butterworths
15. Daugherty R.L., 1937. "Hydraulics", Mc Graw Hill
16. Donevska K., Petkovski L., Vilos I., Kondinski I., Vesna Z., Pintar M., Bogataj L., Črepinšek Z., "Meeting the Increased Irrigation Demand as a Result of Climate Change", Funded by Ministry of Science and Education of the Republic of Macedonia and Slovenian Research Agency, (2006-present), „Задоволување на зголемените потреби од вода за наводнување како резултат на климатските промени“, заеднички научно-истражувачки проект меѓу Р. Словенија и Р. Македонија, (во тек на изработка 2006-2007);
17. Đorđević B., 1973. "Prilog rešavanju problema dimenzionisanja akumulacionog basena i planiranja njegovog korišćenja", doktorska disertacija, Beograd
18. Đorđević B., 1981. "Korišćenje vodnih snaga I - Osnove hidroenergetskog korišćenja voda", Beograd
19. Đorđević B., 1986. "Upravljanje vodama i uredjenje voda", II kongres o vodama Jugoslavije, Ljubljana, p.11-71
20. Đorđević B., 1989.a "Hidroenergetska postrojenja - TEHNIČAR 6", Beograd
21. Đorđević B., 1989.b "Korišćenje vodnih snaga II - Objekti hidroelektrana", Beograd
22. Đorđević B., 1989.c "Vodoprivreda - TEHNIČAR 6", Beograd
23. Đorđević B., 1990. "Vodoprivredni sistemi", Beograd
24. Đorđević B., 1994. "Primena teorije rasplnutih skupova za rešavanje zadataka upravljanja i odlučivanja u vodoprivredi", Vodoprivreda 150-152, Beograd, p.95-105
25. Đorđević B., Dašić T., 2003. "Garantovani protoci nizvodno od brana kao mera zastite biocenoza", II Kongres JDVB, II Congress YCOLD, October 7-10, Kladovo, Proc. p.023-030
26. Dubois D., Prade H., 1979. "Outline of Fuzzy Set Theory: An Introduction", Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, North-Holland P.C., p.27-48.
27. Dubois D., Prade H., 1980. "Fuzzy Set And Systems: Theory and Applications", Academic Press
28. Duckstein L., Opricović S., 1980. "Multiobjective Optimization in River Basin Development", Water Resources Research (AGU), Vol. 16(1) - February, p.14-20.
29. Fedrizzi M., 1990. "Introduction to Fuzzy Sets and Possibility Theory", Optimization Models, Fuzzy Sets, and Possibility Theory, p.13-26
30. Fiering B.M., 1967. "Steramflow Synthesis", Harvard University Press
31. Froehlich D.C., 1995. "Peak outflow from breached embankment dam", Water Resources Planning and Management (ASCE), Vol.121 No.1, p.90-97
32. FuzzyClips v6.02A, 1994. "User's Guide", Institute for Information Technology, National Research Council Canada
33. Gavrilas G., Hapurne T., 1998. "Aspects concerning the artificial intelligence application in the water feeding control", VI International Symposium on water management and hydraulic engineering, Dubrovnik, Croatia, Proceedings Vol.1, p.169-178
34. Georgakakos A.P., Yao H., Yu Y., 1997. "A control model for dependable hydropower capacity optimization", Water Resources Research (AGU), Vol. 33(10) October, p.2349-2365
35. Georgakakos A.P., Yao H., Yu Y., 1997. "Control model for hydroelectric energy optimization", Water Resources Research (AGU), Vol. 33(10) October, p.2367-2379
36. Geo-Slope CTRAN/W v5, 2001. "User's Guide for finite element contaminant transport analysis", GEO-SLOPE International Ltd., Calgary, Alberta, Canada
37. Groothuizen R.J.P., 1986. "Inexact Reasoning in Expert Systems: An Integrating Overview", NLR
38. Gupta Madan M., Yamakawa Takeshi, 1988. "Fuzzy Computing Theory, Hardware, and Applications", North-Holland
39. Hagen D.C., Webby M.G., Froehlich D.C., 1996. Discussion on "Peak outflow from breached embankment dam", Water Resources Planning and Management (ASCE), Vol.122 No.4, p.314-319
40. Haimes Y.Y., 1977. "Hierarchical Analyses of Water Resources Systems", Mc Graw Hill
41. Hall W.A., Dracup J.A., 1970. "Water Resources Systems Engineering", Mc Graw Hill

42. HEC-5, 1998, "HEC-5, Simulation of Flood Control and Conservation Systems", User's Manual, Version 8.0, Hydrologic Engineering Center, US Army Corps of Engineers
43. HEC-HMS, 2001. "HEC-HMS, Hydrologic Modeling System", User's Manual, Version 2.1.1, Hydrologic Engineering Center, US Army Corps of Engineers
44. HEC-RAS, 2003.a "HEC-RAS, River Analysis System", User's Manual, Version 3.1.1, Hydrologic Engineering Center, US Army Corps of Engineers
45. HEC-RAS, 2003.c "HEC-RAS, River Analysis System", Applications Guide, Version 3.1.1, Hydrologic Engineering Center, US Army Corps of Engineers
46. HEC-ResSim, 2007. "HEC-ResSim, Reservoir System Simulation", User's Manual, Version 3.0, Hydrologic Engineering Center, US Army Corps of Engineers
47. Hsu K., Gupta H.V., 1995. "Artificial neural network modeling of the rainfall-runoff process", Water Resources Research (AGU), Vol. 31(10) October, p.2517-2530.
48. Ignjatović L., 1989. "Snabdevanje naselja vodom, mineralne vode i rekreacija - TEHNIČAR 6", Beograd
49. Ivanov P., Masliev I., Kularathna M., Marchi C., Somlyódy L., 1996., DECision Support sysem for Evaluating River basin sTrategies - DESERT User's Manual, International Institute for Applied System Analysis, Laxenburg, Austria and Institute for Water and Environmental Problems, Barnaul, Russia
50. Jaeger C., 1977. "Fluid Transients in Hydro Electric Engineering Practice", London
51. James D., Lee R., 1971. "Economics of Water Resources Planning", McGraw-Hill
52. Jevdjević V., 1956. "Hidrologija", Beograd
53. Jevdjević V., 1974. "Stohastički procesi u hidrologiji", Sarajevo
54. Jevdjević V., 1977. "Vjerovatnoća i statistika u hidrologiji", Sarajevo
55. Jovanović S., 1989. "Hidrologija - TEHNIČAR 6", Beograd
56. Kantardžić M., Agović N., Filipović A., 1989 "Editor fuzzy podataka u sistemu DIPSY-E", Proceedings III-ETAI, Vol.2, p.166-177
57. Karamouz M., Houck M., 1982. "Annual and Monthly Reservoir Operating Rules Generated by Deterministic Optimization", Water Resources Research (AGU), Vol. 18(5) October, p.1337-1344.
58. Kosko Bart, 1994. "Fuzzy Thinking", Flamingo, London
59. Kuiper E., 1965. "Water Resources Development - planning, engineering and economics", Butterworths, London
60. Kuiper E., 1971. "Water Resources Project Economics", Butterworths, London
61. Leung K.S., Lam W., 1988. "Fuzzy Concepts in Expert Systems", COMPUTER September, p.43-56.
62. Limić N., Pašagić H., Rnjak Č., 1978. "Linearno i nelinearno programiranje", Informator, Zagreb
63. Lipschutz S., 1966. "Theory and Problems of Finite Mathematics", McGraw-Hill, New York
64. Maass A., Hufschmidt M.M., Dorfman R., Thomas H., Marglin S.A., Fair G.M., 1962. "Design of Water Resources Systems", Macmillan
65. Marković R., 1973. "Matematičko - statistički metodi testiranja konzistencije i homogenosti meteoroloških i hidroloških elemenata čovekove okoline", Beograd
66. Microsoft FORTRAN, 1989., Reference Ver. 5.0, USA
67. Miloradov M., Opricović S., 1990. "Optimalno upravljanje sistemom Đerdap I i II", Vodoprivreda 22/123-124, 107-117, Beograd
68. Mirza M.M.Q., 2008. "Climate change, water and implication for hydropower", International Journal on Hydropower & Dams, Vol.15, Issue 1, p.85-90
69. Mosonyi E., 1963. "Water Power Development, Vol. I and II", Budapest
70. Munakata T., Jani Y., 1994. "Fuzzy Systems: An Overview ", Communications of The ACM, Vol.37/3 March, p.69-76.
71. Nachtnebel H.P., 1998. "Sustainability concepts in water resources management: A myth or a guideline for engineers", VI International Symposium on water management and hydraulic engineering, Dubrovnik, Croatia, Proceedings Vol.1, p.37-48
72. Omura G., 1996. "AutoCAD 13", Mikro knjiga, Beograd
73. Opricović S., 1986. "Višekriterijumska optimizacija", Beograd
74. Opricović S., 1992. "Optimizacija sistema", Beograd
75. Opricović S., 1995. "Optimizacija sistema - Zadaci iz vodoprivrede i hidrotehnike", Beograd
76. Opricović S., Miloradov M., 1990. "Programski paket za analizu eksploatacije Đerdapskog sistema ", Vodoprivreda 22/123-124, 119-124, Beograd
77. Parasay K., Chignell M., 1988. "Uncertainty", Expert System for Experts, John Wiley & Sons, NY
78. Pauše Ž., 1980. "Uvod u teoriju informacije", ŠK, Zagreb
79. Pedrycz W., 1990. "Fuzzy Systems: Analysis and Synthesis from Theory to Applications", International Journal of General Systems, Vol. 17(2/3), p.139-156
80. Permakian J., 1964. "Waterhammer Analysis ", New York
81. Petković T., 1986. "Prognoza dotoka u akumulaciju HE Đerdap ", II kongres o vodama Jugoslavije, Ljubljana, p.376-386.
82. Petkovski L., 1998. "Fazi model za simulaciono upravljanje višenamenskom akumulacijom", statija, Vodoprivreda 171-172, "Fuzzy Model for Simulated Management of a Multi-purpose Reservoir", WATER-ECONOMY #171-172, April, Belgrade, p. 93-102
83. Petkovski L., 2000. "Development of an Information System for Flood Defences using a Simulation Model for Operational Management", paper, International Conference on River Flood Defence, September 20-23, Kassel, Germany, Proceedings Vol.1, D65-D73;

84. Petkovski L., 2005.b "Simulation Model for Multipurpose Water Management System with Two-step Usage of the Water Resource", paper, IX International Symposium on Water Management and Hydraulic Engineering, September 04-07, Ottenstein, Austria, Proceedings, 061-069;
85. Petkovski L., 2007. "Seismic Analysis of a Rock-filled Dam with Asphaltic Concrete Diaphragm", paper, 4th International Conference on Earthquake Geotechnical Engineering, 25-28 June 2007, Thessaloniki, Greece, CD-ROM;
86. Petkovski L., 2007.b "Simulation model for management of a complex diversion hydro power plant", paper, X International Symposium on Water Management and Hydraulic Engineering, September 04-09, Šibenik, Croatia, CD- Proceedings, Book of abstracts p.179;
87. Petkovski L., 2007.c "Simulation Model for Management of Complex Multipurpose Hydro System Composed of a Reservoir and Diversions", paper, Jubilee Scientific Conference on the Occasion of the 65th Anniversary of the University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy – Sofia, May 17-18, Sofia, Bulgaria, Abstracts Proceedings p.331, CD-ROM;
88. Petkovski L., 2008. APPLICATION OF CONTEMPORARY SIMULATION MODELS FOR MANAGEMENT OF WATER RESOURCES SYSTEMS, Third International Scientific Conference BALWOIS 2008, 27-31 May 2008, Ohrid, Republic of Macedonia, CD-ROM
89. Petkovski L., 2008.b "Water Resources Management", manuscript for the subject of the three-year undergraduate interdisciplinary studies of "Environmental and Resources Engineering", developed within the framework of the international TEMPUS project JEP-19028-2004,
90. Petkovski L., Dodeva S., 1999. "Influence of the effect of self-purification of the water in reservoirs on the management of water resource systems", paper, International Conference on Problems in Fluid Mechanics and Hydrology, June 23-26, Prague, Czech Republic, Proceedings Vol.2, 513-520;
91. Petkovski L., Dodeva S., 2003. "Finite Element Modelling Of Chromium Mass Transport Through the Soil", paper, VIII International Symposium on Water Management and Hydraulic Engineering, October 05-09, Podbanske, Slovakia, Proceedings, 321-326;
92. Petkovski L., Paskalov T., 2003. "Comparison of Dynamic Analyses of Embankment Dams by Using Lumped Mass Method and Finite Element Method", paper, International Conference in Earthquake Engineering - Skopje Earthquake - 40 Years of European Earthquake Engineering, August 26-29, Skopje, Ohrid, Republic of Macedonia, Proceedings, CD-ROM
93. Petkovski L., Tančev L., 1998. "Comparison between conventional and fuzzy controllers for real management of a water resources system", VI International Symposium on water management and hydraulic engineering, Dubrovnik, Croatia, Proceedings Vol.1, p.73-80
94. Petkovski L., Tančev L., 1998.b "Hydraulic and mechanical response of an earth dam during construction", VI International Symposium on water management and hydraulic engineering, Dubrovnik, Croatia, Proceedings Vol.2, p.239-248
95. Petkovski L., Tančev L., 2001. "Application of hydraulic and hydrological models in water resource management analyses", paper, VII International Symposium on Water Management and Hydraulic Engineering, September 10-12, Miedzybrodzie Zyrardow, Poland, Proceedings, 63-70;
96. Petkovski L., Tančev L., 2003. "Dynamic Analysis of a Rock-filled Dam with Geosynthetic Screen", paper, International Conference in Earthquake Engineering - Skopje Earthquake - 40 Years of European Earthquake Engineering, August 26-29, Skopje, Ohrid, Republic of Macedonia, Proceedings, CD-ROM,
97. Petkovski L., Tančev L., 2003.b "Selection of Procedure for Solving the Water Resource Management Task for a Serial Hydropower System", paper, VIII International Symposium on Water Management and Hydraulic Engineering, October 05-09, Podbanske, Slovakia, Proceedings, 327-334;
98. Petkovski L., Tančev L., Mitovski S., 2007. "Statika analiza jalovista simulacijom realne hronologije opterećenja", "Static Analysis of tailing dam with simulation of realistic chronology of loading", II Naučno Stručno Savetovanje, Geotehnički aspekti gradjevinarstva, 29.Dec.- 02.Nov. 2007, Soko Banja, Srbija, Proceedings p.83-89, CD-ROM;
99. Petkovski L., Tančev L., Mitovski S., 2007.b "A CONTRIBUTION TO THE STANDARDISATION OF THE MODERN APPROACH TO ASSESSMENT OF STRUCTURAL SAFETY OF EMBANKMENT DAMS", 75th ICOLD Annual Meeting, International Symposium "Dam Safety Management, Role of State, Private Companies and Public in Designing, Constructing and Operation of Large Dams", 24-29 June 2007, St.Petersbourg, Russia, Abstracts Proceedings p.66, CD-ROM;
100. Petreski Z., 1990. "Optimalno upravljanje kaskadom akumulacionih jezera - Ohridsko, Globočica, Špilje", Vodoprivreda 22/127-128, 639-648, Beograd
101. Petrić J., 1976. "Operaciona istraživanja, knjiga II", Beograd
102. Petrić J., 1979. "Operaciona istraživanja, knjiga I", Beograd
103. Petrić J., Sarenac L., Kolić Z., 1988. "Operaciona istraživanja, Zbirka rešenih zadataka, knjiga II", Beograd
104. Petrićec, M., Margeta J., 1999. "Model optimalnog upravljanja hidroenergetskim akumulacijama", Hrvatske vode 7/26, 1-14, Zagreb
105. Petricher M., Margeta J., 1998. "Management of Peruca reservoir by objective-space dynamic programming method", VI International Symposium on water management and hydraulic engineering, Dubrovnik, Croatia, Proceedings Vol.1, p.399-412
106. Pickford J., 1969. "Analysis of Surge", Macmillan, London
107. Požar H., 1966. "Snaga i energija u elektroenergetskim sistemima", Beograd
108. Press W.H, Teukolsky S.A., Vetterling W.T, Flannery B.P., 1994. "Numerical Recipes in FORTRAN", Second Edition, Cambridge University Press
109. Radojković M., Klem N., 1989. "Primena računara u hidraulici", Beograd

110. Raus H., 1969. "Tehnička hidraulika", Beograd
111. Rubinić J., Margeta J., 2001. "Dimenzioniranje akumulacija primjenom generiranih protoka", Građevinar 53 (2001) 1, 17-23, Zagreb
112. Russell S.O., Campbell P.F., 1996. "Reservoir operating rules with fuzzy programming", Water Resources Planning and Management (ASCE), Vol.122 No.3, p.165-170
113. Saad M.,..., 1996. "Fuzzy learning decomposition for the scheduling of hydroelectric power systems", Water Resources Research (AGU), Vol. 32(1) January, p.179-186
114. Šešelja B., Vojvodić G., 1990. "Osnovi teorije rasplinitih skupova", Matematičke osnove informatike, p.197-243.
115. Shrestha B.P., Duckstein L., Stakhiv E.Z., 1996. "Fuzzy rule-based modeling of reservoir operation", Water Resources Planning and Management (ASCE), Vol.122 No.4, p.262-269
116. Simonović S. 1989. "Modeliranje akumulacija - od sumarne krive do ekspertnih sistema", Vodoprivreda 21/122, 653-664, Beograd
117. Sims J.R., Zhenyuan W. "Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals: An Overview", International Journal of General Systems, Vol. 17(2/3), 1990, p.157-189.
118. Spiegel M., 1961. "Theory and Problems of Statistics", McGraw-Hill, New York
119. Srebrenović D., 1986. "Primijenjena hidrologija", Zagreb
120. Srebrenović D., 1970. "Problemi velikih voda", Zagreb
121. Stewart J., 1993. "A Partly True Story", SCIENTIFIC AMERICAN, p.110-112.
122. Storm Water Management Model, 1995. "Windows Interface User's Manuel", US Environmental Protection Agency, Washington DC, USA
123. Tadić L., Mlinarević K., 1998. "GIS application in the water management", VI International Symposium on water management and hydraulic engineering, Dubrovnik, Croatia, Proceedings Vol.1, p.65-72
124. Tančev L., Petkovski L., 2006. "New large dams are necessary in Republic of Macedonia", International symposium on dams in the societies of the 21th century, ICOLD - SPANCOLD, June 2006, Barcelona, Spain, Proc., Vol.1, p.365-372;
125. Tomanić M., Simonović S. 1985. "Usporedna analiza brzih postupaka dimenzioniranja akumulacija", Vodoprivreda 17/98, 385-394, Beograd
126. Turgeon A., 1982. "Incremental Dynamic Programming May Yield Nonoptimal Solutions", Water Resources Research, Vol. 18(6) December, p.1599-1604.
127. USACE ED, 1985. "Hydropower", EM-1110-2-1701, Washington, DC
128. USACE ED, 1987. "Management of Water Control Systems", EM-1110-2-3600, Washington, DC
129. USACE ED, 1994. "Flood-Runoff Analysis", EM-1110-2-1417, Washington, DC
130. USACE ED, 1997. "Hydrologic Engineering Requirements for reservoirs", EM-1110-2-1420, Washington, DC
131. USACE HEC, 1991. "Optimization of Multiple-Purpose Reservoir System Operations: A Review of Modeling and Analysis Approaches", RD-034, Davis, CA
132. USACE HEC, 1996. "Developing Seasonal and Long-Term Reservoir System Operation Plans Using HEC-PRM", RD-040, Davis, CA
133. Vladislavljević Ž., 1969. "O vodoprivredi - pogledi i metode", Beograd
134. Voronjec K., Obradović N., 1976. "Mehanika fluida", Beograd
135. Vuković M., Soro A., 1984. "Dinamika podzemnih voda", Beograd
136. Water Development Institute of Republic of Macedonia (WDIRM), 1997. Environmental Statement, Irrigation Rehabilitation and Restructuring Project, Skopje
137. White D.J., 1969. "Dynamic Programming", San Francisco
138. Wilde D., Beightler C., 1967. "Foundations of Optimization", Prentice Hall
139. Wurbs R.A., 1994. "Computer Models for Water Resources Planning and Management", USACE, IWR 94-NDS-7, Virginia
140. Yakowitz S., 1982. "Dynamic Programming Applications in Water Resources", Water Resources Research (AGU), Vol. 18(4) August, p.673-696
141. Yang X., Parent E., Michel E., Roche P.A., 1995. "Comparison of Real-Time Reservoir-Operation Techniques", Water Resources Planning and Management (ASCE), Vol 121. No.5 Sep/Oct, p.345-351
142. Zadeh L.A., 1968. "Probability Measures of Fuzzy Events", Journal of Mathematical Analysis and Applications 23, p.421-427
143. Zadeh L.A., 1988. "Fuzzy Logic", COMPUTER, p.83-93
144. Zadeh L.A., 1990.a "Fuzzy Sets and Systems", International Journal of General Systems, Vol. 17(2/3), p.129-138
145. Zadeh L.A., 1990.b "The Birth and Evolution of Fuzzy Logic", International Journal of General Systems, Vol. 17(2/3), p.95-105
146. Zadeh L.A., 1994. "Fuzzy Logic, Neural Networks and Soft Computing", Communications of The ACM, Vol.37/3, p.77-84
147. Zdravkova K., Petkovski L., 1999. "Application of neural networks in simulation of hydrological sets", paper, 21st International Conference on Information Technology Interfaces, June 15-18, Pula, Croatia, Proceedings, 439-444;
148. Živojnović Lj., 1986. "Linearni zakon upravljanja hidroelektranama u slivu Drine", II kongres o vodama Jugoslavije, Ljubljana, p.567-575
149. Авакумовић Д., Трајковић С., 1996. „Фази модел на загадување на подземни води со азот од ђубрива“, I меѓународна конференција за одведување и пречистување на отпадни води и заштита на животната средина, Охрид, p.221-226
150. Арсенов А., 1996. „Производство на електрична енергија“, Скопје
151. Битраков Д., 1987. „FORTRAN програмски јазик“, Скопје

152. Бошевски Т., Тодоровски М., Чаушевски А., 2001., „Пумпно-акумулациони хидроцентрали во ЕЕС на Македонија“, Енергетика IX/30, Скопје, р.7-13
153. Василев С., 1976. „Хидравлика на хидротехническите сороженија“, Софија
154. Иванова Давидовиќ Ј., 2003. „Хидро потенцијалот во РМ, сегашна изграденост и можности за искористување“, Тркалезна маса на ЗЕМАК на тема „Водниот потенцијал на Република Македонија - електроенергетски аспекти“, Битола, р.07-16
155. Каевски И., 2002. „Придонес кон стохастичко проучување на просторно - временски зависни хидролошки процеси“, Докторска дисертација, Градежен факултет, Скопје
156. Каевски И., Петковски Љ., 1955. „Зголемување на ефикасноста кај водоснабдителни системи со примена на информатички мерно управувачки модул“, статија, Македонско водостопанство II/2, март, Скопје, 23-24;
157. Карчицка Д. Л., 1987. „Теорија и методи на линеарното програмирање“, Скопје
158. Кралев Т., 1984. „Теорија на системите, на информациите и на информативните системи“, Скопје
159. Манасов С., 1996. „Географски информативни системи во одбраната“, Скопје
160. Милославов С., 1990. „Хидроенергијни системи“, Софија
161. МКГБ, 1999. „Проектирање и изградба на браната Козјак со придружните објекти“, Соопштенија од советувањето, Струга, (MACOLD, 1999. Macedonian Committee on Large Dams, "Design and construction of Kozjak Dam and accompanying structures", Proceedings of the symposium, Struga, Republic of Macedonia)
162. Перфильева И.Г., 1990., „Приложения теории нечетких множеств“ УДК 519.716.34
163. Петковски Љ., 1991. „Оптимизација на водостопански системи со методот на динамичко програмирање“, Магистерска теза, август, Градежен факултет, Скопје;
164. Петковски Љ., 1996.а „Ефикасност на управувањето со акумулацијата Козјак при променлив дополнителен ретензионен простор“, статија, Македонско водостопанство III/6, март, Скопје, 27-28;
165. Петковски Љ., 1996.б „Определување на енергетска карактеристика на хидроцентрала“, статија, Македонско водостопанство III/9, декември, Скопје, 31-35;
166. Петковски Љ., 1996.в „Оптимално управување со повеќенаменската акумулација Козјак“, реферат, III Советување за Водостопанството во Република Македонија, март, Струга, Зборник, 227-238;
167. Петковски Љ., 1997.а „Водостопански системи“, интерна скрипта за предавањата по предметот Водостопански системи, студии по градежништво VIII степен, декември, Скопје;
168. Петковски Љ., 1997.б „Информационен систем за управување со водостопански систем со акумулација“, реферат, IV Советување за Водостопанството во Република Македонија, март, Охрид, Зборник, "Information System for Planning and Management of a System of Water Resources with a Reservoir", IV Conference on Water Management in Republic of Macedonia, Ohrid, Proceedings, p 165-173;
169. Петковски Љ., 1997.в „Развој на информативен систем за управување со сложени водостопански системи во услови на неодреденост“, Докторска дисертација, Градежен факултет, Скопје, "Development of Information System for Management of Complex Water Resource Systems in Conditions of Uncertainty", Ph.D. Thesis, Faculty of Civil Engineering, Skopje
170. Петковски Љ., 1998. „Програмски задачи по предметот водостопански системи“, упатство за изработка на програми за студии по градежништво VIII степен, декември, Скопје
171. Петковски Љ., 2001. „Седми интернационален симпозиум за управување со води и хидротехника“, извештај, Македонско водостопанство VIII/29, декември, Скопје, 39-40;
172. Петковски Љ., 2002.а „Основи на хидроенергетика“, интерна скрипта за предавањата по предметот Искористување на водните сили I дел, студии по градежништво VIII степен, јули, Скопје;
173. Петковски Љ., 2002.б „Хидроенергетски објекти“, интерна скрипта за предавањата по предметот Искористување на водните сили II дел, студии по градежништво VIII степен, јануари, Скопје;
174. Петковски Љ., 2003. „Браните и акумулациите во Законот за води на Р.Македонија“, реферат, IX Советување за Водостопанството во Република Македонија, октомври 23-25, Охрид, Зборник, р. 035-046;
175. Петковски Љ., 2003. „Упатство за избор на опрема во машинска сала на хидроцентрала“, интерна скрипта за вежби по предметот Искористување на водните сили, студии по градежништво VIII степен, февруари, Скопје;
176. Петковски Љ., 2004. „Влијание на обликот на преградниот профил врз филтрацијата низ земјени брани“, реферат, I конгрес на Македонскиот комитет за големи брани, октомври, Охрид, Зборник, "The influence of the dam profile on filtration through earth-filled dams", I Congress of the Macedonian Committee on Large Dams, October, Ohrid, Proceedings, p. 15-24;
177. Петковски Љ., 2006. „Примена на нумеричкото моделирање во истражување на одговорот на хидројаловиштата од статички оптоварувања“, реферат, II Симпозиум на друштвото за геотехника на Македонија, јуни 29-30, Охрид, Зборник 246-253, "Application of numerical modeling on researches of the responses of tailings due static loads", paper, II Symposium of MAG, June 29-10, Ohrid, Proceedings 246-253;
178. Петковски Љ., Мославац Д., 2000. „Споредбена анализа за стабилност на косини со примена на конвенционални и современи нумерички методи“, реферат, VII Симпозиум за теоретска и применета механика, септември, Струга, Зборник Книга 2, 595-602;
179. Петковски Љ., Паскалов Т., 2004. „Определување на перманентни поместувања кај земјени брани под дејство на земјотрес“, реферат, I конгрес на Македонскиот комитет за големи брани, октомври, Охрид, Зборник, "Evaluation of the permanent displacements of earth-fill dams subjected to strong earthquakes", I Congress of the Macedonian Committee on Large Dams, October, Ohrid, Proceedings, p.37-44;
180. Петковски Љ., Танчев Љ., 1998.а „Интеракција на водостопанската основа со останатите општествени планирања“, реферат, Меѓународен научен собир за „Перспективи и унапредување на планирањето и уредувањето на просторот“, март 4-7, Охрид, Зборник, 296-300;

181. Петковски Љ., Танчев Љ., 1998.б „Моделирање на транспортот на загадени материи со методот на конечни елементи“, реферат, V Советување за Водостопанството во Република Македонија, март, Струга, Зборник, 235-242;
182. Петковски Љ., Танчев Љ., 1999.а „Изработка и реализација на водостопанската основа“, реферат, VI Советување за Водостопанството во Република Македонија, мај, Охрид, Зборник, 175-184;
183. Петковски Љ., Танчев Љ., 1999.б „Симулационен модел за анализа на серски двоакумулационен водостопански систем“, реферат, VI Советување за Водостопанството во Република Македонија, мај, Охрид, 291-300;
184. Петковски Љ., Танчев Љ., 2000.а „Моделирање на управувањето со водните ресурси во Физибилити студијата за интегрален развој на Вардарската долина“, статија, Македонско водостопанство VII/23-вонреден број, јуни, Скопје, 33-35;
185. Петковски Љ., Танчев Љ., 2000.б „Оперативно управување со акумулацијата КОЗЈАК при појава на поплавен бран“, реферат, VII Советување за Водостопанството во Република Македонија, мај, Охрид, Зборник 145-154;
186. Петковски Љ., Танчев Љ., 2001. „Управување со водите - управувачки акции со водостопанските системи“, воведен реферат, VIII Советување за Водостопанството во Република Македонија, јуни 14-16, Струга, Зборник 103-112;
187. Петковски Љ., Танчев Љ., 2002. „Влијание на акумулациите врз природните и вештачките поплавни бранови“, реферат, Советување на тема „Загрозеност на РМ од природни и технички катастрофи и современа превенција“ во организација на: Научна установа СИБН, Градежен факултет и Фонд за води на РМ, јули 02, Скопје, Зборник 23-38
188. Петковски Љ., Танчев Љ., 2004. „Основни поставки на современиот пристап за статичка анализа на насипни брани“, реферат, I конгрес на Македонскиот комитет за големи брани, октомври, Охрид, Зборник, "Basic principles of modern approaches to static analysis of earth filled dams", I Congress of the Macedonian Committee on Large Dams, October, Ohrid, Proceedings, p. 25-36;
189. Петковски Љ., Танчев Љ., Велиновски В., Јовановски И., 2002. „Анализа на напрегања и деформации на каменонасипна брана со екран од геосинтетика“, реферат, I Советување на друштвото за геотехника на Македонија, јуни 26-28, Охрид, Зборник 238-247;
190. Петковски Љ., Танчев Љ., Здравкова К., Дурнев Н., Величков С., Пецев З., Додева С., Донева К., 2002. „Развој на интегриран информационен систем за планирање и користење на водостопански системи со акумулации“, научно-истражувачки проект финансиран од Министерство за наука на РМ, септември, Скопје;
191. Петковски Љ., Танчев Љ., Митовски С. 2009. „СТАТИЧКА АНАЛИЗА НА НАСИПНИ БРАНИ НА НЕСТЕНОВИТА ОСНОВА“, реферат, II конгрес на Македонскиот комитет за големи брани, мај, Струга, Зборник, "STATIC ANALYSIS OF EMBANKMENT DAMS ON NON-ROCK FOUNDATION", II Congress of the Macedonian Committee on Large Dams, May, Struga, Proceedings, p. 65-74;
192. Петковски Љ., Танчев Љ., Рибески Д., 2000. „Примена на повратната анализа во истражување на стабилност на свлечишта“, реферат, VII Симпозиум за теоретска и применета механика, септември, Струга, Зборник Книга 2, 603-611;
193. Петковски Љ., Танчев Љ., Рибески Д., Кикеркова Б., 2002. „Примена на геотехничкото моделирање во IN SITU истражувањата кај хетерогени материјали“, реферат, I Советување на друштвото за геотехника на Македонија, јуни 26-28, Охрид, Зборник 339-344
194. Петрески З., 1999. „Генерален модел за долгорочно планирање и управување во реално време со сложени хидроенергетски системи“, Докторска дисертација, Градежен факултет, Скопје
195. Шкоклевиќ Ж., 1980. „Стохастичка хидрологија“, скрипта за постдипломски студии, Скопје
196. Шкоклевиќ Ж., 1986. „Уредување на водотеците“, Скопје
197. Шкоклевиќ Ж., Тодоровски Б., 1993. „Интензивни врнежи во Република Македонија“, Скопје